I. megoldás. Az egyenlet bal oldalán álló tört átalakítható úgy, hogy csak egyszer szerepeljen benne az ismeretlen:

$$\frac{5x}{x+5}=\frac{5}{1+\dfrac{5}{x}}.$$

(Nyilván $x=0$ nem megoldás.) Természetesen x is hasonló alakba írható:

$$x=\frac{5}{\dfrac{5}{x}},$$

s ha most az $y=0{,}5+\dfrac{5}{x}$ helyettesítést alkalmazzuk, az egyenlet szimmetrikussá válik:

$$\frac{25}{(y-0{,}5)^2}+\frac{25}{(y+0{,}5)^2}=1.$$

Ez az egyenlet már a $(y^2-0{,}25)^2$ közös nevezővel szorozva y^2-re másodfokú (míg az eredeti egyenletben a szorzás után megmaradnak a páratlan fokú tagok is):

$$50(y^2+0{,}25)=y^4-0{,}5y^2+0{,}25^2.$$

Ebből a

$$16y^4-808y^2-199=0$$

egyenlethez jutunk, amelynek pozitív gyöke

$$y^2=\frac{101+20\sqrt{26}}{4};$$

innen két megoldást kapunk :

$$x_1=\frac{10}{\sqrt{101+20\sqrt{26}}-1}\approx 0{,}7549 \quad \text{és} \quad x_2=\frac{10}{-\sqrt{101+20\sqrt{26}}-1}\approx -0{,}6559.$$

Az átalakítások végig megfordíthatók, így ezek az értékek valóban megoldások.

II. megoldás. Az általánosabb $x^2+\left(\dfrac{ax}{x+a}\right)^2=1$ egyenletet fogjuk megoldani $|a|\geqq 1$ esetben. (Az $|a|<1$ eset diszkussziója egy kicsit bonyolultabb, de nincs rá szükségünk: a feladatban $a=5$.).

Tekintsük az $x\mapsto x^2+\left(\dfrac{ax}{x+a}\right)^2$ függvényt; ez $|x|\geqq 1$ esetén egynél nagyobb értéket vesz fel, míg $x=0$-ban nulla az értéke. Így az egyenletnek van legalább egy-egy gyöke a $(-1,0)$ és a $(0,1)$ intervallumban, és máshol nincs gyöke. (Felhasználtuk, hogy függvényünk folytonos). Egyenletünk pontosan azt jelenti, hogy valamilyen α számra $x=\sin\alpha$ és $\dfrac{ax}{x+a}=\cos\alpha$. Az $\dfrac{ax}{x+a}$ törtben elvégezve az $x=\sin\alpha$ helyettesítést, rendezés után az

$$a(-\cos\alpha+\sin\alpha)=\sin\alpha\cos\beta \tag{1}$$

egyenlethez jutunk. Ezt négyzetre emelve és alkalmazva a $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ összefüggést, $\sin\alpha\cos\alpha=u$-ra másodfokú egyenletet nyerünk: $u^2+2ua^2-a^2=0$, azaz $\sin\alpha\cos\alpha=u=-a^2\pm\sqrt{a^4+a^2}$. Ismeretes, hogy

$$|\sin\alpha\cos\alpha|=\left|\frac{\sin 2\alpha}{2}\right|\leqq\frac{1}{2},$$

másrészt

$$-a^2-\sqrt{a^4+a^2}<-2a^2\leqq -2, \quad \text{ha} \quad |a|\geqq 1.$$

Ezért csak az $u=-a^2+\sqrt{a^4+a^2}$ gyök ad megoldást α-ra. A továbbiakban kiszámítjuk $\sin\alpha+\cos\alpha$ és $\sin\alpha-\cos\alpha$ értékét.(1) szerint

$$-\cos\alpha+\sin\alpha=-a+e\sqrt{1+a^2} \quad \left(e=\frac{|a|}{a}=1 \quad \text{vagy} \quad -1\right).$$

Másrészt $(\cos\alpha+\sin\alpha)^2=1+2u=1-2a^2+2|a|\sqrt{1+a^2}$, így

$$\cos\alpha+\sin\alpha=\pm\sqrt{(1-2a^2+2|a|\sqrt{1+a^2})}.$$

A két egyenletet összeadva és kettővel osztva:

$$x = \sin\alpha = \frac{e\sqrt{1+a^2} - a \pm \sqrt{1 - 2a^2 + 2|a|\sqrt{1+a^2}}}{2}.$$

(A gyökjelek alatt pozitív számok állnak.) Legföljebb ez a két érték lehet gyök. Másrészt láttuk, hogy az egyenletnek legalább két gyöke van, így a fenti két megoldás gyöke az egyenletnek és több nincs.

$$x_{1,2} = \frac{\sqrt{26} - 5 \pm \sqrt{10\sqrt{26} - 49}}{2}.$$

Boncz András (Zalaegerszeg, Zrínyi M. Gimn., II. o. t.)

Megjegyzések: 1. Természetesen az I. megoldás gondolatmenete is alkalmazható az általános esetben.

2. A két megoldás különböző alakú eredményt ad, de közvetlenül is ellenőrizhető, hogy ezek egyenlőek. Ugyanis

$$10\sqrt{26} - 49 = 2 - (\sqrt{26} - 5)^2 = \frac{2(\sqrt{26}+5)^2 - 1}{(\sqrt{26}-5)^2},$$

így pl.

$$x_1 = \frac{\sqrt{26} - 5 + \sqrt{10\sqrt{26} - 49}}{2} = \frac{1 + \sqrt{2(\sqrt{26}+5)^2 - 1}}{2(\sqrt{26}+5)} =$$

$$= \frac{1 + \sqrt{101 + 20\sqrt{26}}}{2(\sqrt{26}+5)} = \frac{100 + 20\sqrt{26}}{2(\sqrt{26}+5)} \cdot \frac{1}{\sqrt{101 + 20\sqrt{26}} - 1} = \frac{10}{\sqrt{101 + 20\sqrt{26}} - 1}.$$