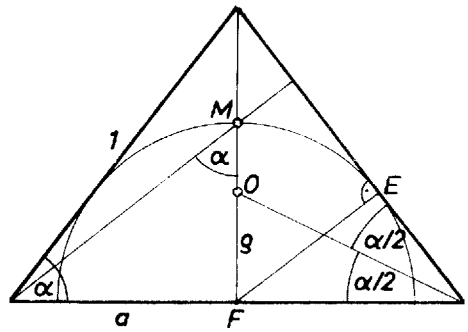
Legyen a háromszögbe írt kör középpontja O, sugara ϱ, és használjuk az ábra további jelöléseit is.



Az ábra alapján rögtön láthatjuk, hogy

$$a = \cos\alpha,$$

továbbá

$$\varrho = \cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Vizsgáljuk ϱ értékét α függvényeként. Ez a függvény a $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumban folytonos, tehát ott van maximuma. Tekintve, hogy a függvény az intervallum végpontjaiban zérus, egyéb helyeken pedig pozitív, maximumát a $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ nyílt intervallumban veszi fel. Világos, hogy ϱ deriválható függvénye α-nak, ezért a keresett maximum olyan helyen lehet, ahol $\varrho' = 0$. Deriválás előtt ϱ fenti kifejezését kissé átalakítjuk. Ehhez felhasználjuk a $\cos\alpha = 2 \cdot \cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$ és a $\sin\alpha = 2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$ azonosságokat.

$$\varrho = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left(2 \cdot \cos^2\frac{\alpha}{2} - 1\right) = 2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sin\alpha - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

A derivált:

$$\varrho' = \cos\alpha - \frac{1}{2 \cdot \cos^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Az előbb használt azonosságok közül az elsőt ismét alkalmazva:

$$\varrho' = \cos\alpha - \frac{1}{1 + \cos\alpha}.$$

A szélsőérték helyét így a

$$\cos\alpha - \frac{1}{1 + \cos\alpha} = 0$$

egyenletből kaphatjuk meg, azaz:

$$\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1 = 0, \tag{1}$$

innen

$$\cos\alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Mivel $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$, s így a háromszög alapja $2a = \sqrt{5} - 1$. A $\cos\alpha$ függvény a szóban forgó intervallumban kölcsönösen egyértelmű, ezért egyetlen olyan α létezik, amely mellett ϱ maximális. (Azt, hogy létezik ilyen α, korábban már megindokoltuk.)

Nézzük ezután az alapra rajzolt és a szárakat érintő félkört. Ennek sugara FE. A feladat második állítása azt jelenti, hogy a maximális ϱ mellett $FM = FE$. Tudjuk, hogy a maximális ϱ értékhez tartozó α-ra fennáll (1), azaz

$$\begin{aligned}
&\cos^2\alpha + \cos\alpha = 1, \text{ és így} \\
&\cos^2\alpha + \cos\alpha = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha, \quad \text{amiből} \\
&\cos\alpha = \sin^2\alpha.
\end{aligned}$$

Ennek az egyenletnek mindkét oldalát ctgα-val szorozva :

$$\cos\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = \sin\alpha \cdot \cos\alpha. \tag{2}$$

Az ábráról könnyen leolvasható, hogy $FM = \cos\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha$ és $FE = \sin\alpha \cdot \cos\alpha$, ezért (2) éppen azt jelenti, hogy $FM = FE$.