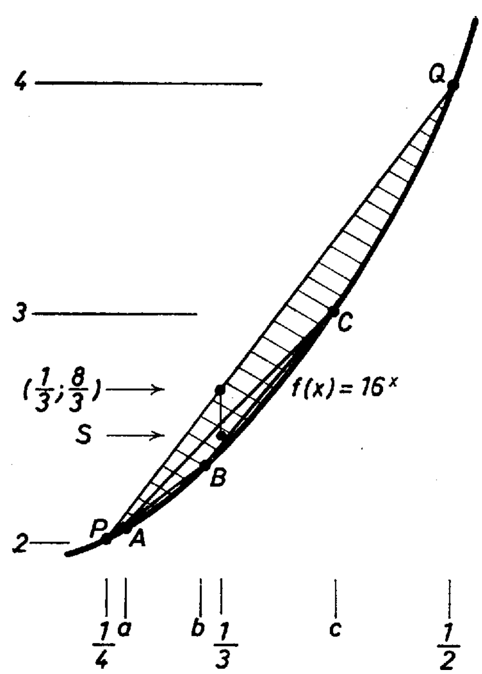
I. megoldás: Rögzítsük először pl. c értékét és keressük a $16^a+16^b+16^c$ kifejezés maximumát e rögzített c mellett. Feltételeink szerint $a \geqq \frac{1}{4}$, $b = 1-a-c \geqq \frac{1}{4}$. Mivel 16^c értéke ilyenkor szintén rögzített, ezért a $16^a + 16^{1-c-a} = f(a)$ függvény maximumát kell megkeresnünk, ha $a \geqq \frac{1}{4}$ és $1-a-c \geqq \frac{1}{4}$, azaz ha $\frac{1}{4} \leqq a \leqq \frac{3}{4} - c$. Az $a \mapsto f(a)$ függvény két konvex függvény: 16^a és $16^{1-c} \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^a$ összege, így maga is konvex. Maximumát tehát az intervallum egyik (esetleg mindkét) végén veszi föl: $a = \frac{1}{4}$ vagy $a = \frac{3}{4} - c$ esetén. Utóbbi esetben $b = 1-a-c = \frac{1}{4}$ tehát az $f(a)$ függvény, s így a $16^a + 16^b + 16^c$ kifejezés is, rögzített c és a feladat feltételei mellett, akkor maximális, ha a és b valamelyike $\frac{1}{4}$. Minthogy a kifejezés és a feladat feltételei teljesen szimmetrikusak, feltehetjük, hogy $a = \frac{1}{4}$. Ha most $a = \frac{1}{4}$-et rögzítjük, és a fenti gondolatmenetet újra alkalmazzuk, azt kapjuk, hogy a $16^a + 16^b + 16^c$ kifejezés akkor maximális, ha b és c egyikének értéke is $\frac{1}{4}$, s ekkor a másik értéke $\frac{1}{2}$. Azt kaptuk tehát, hogy ha $a+b+c = 1$, $a, b, c \geqq \frac{1}{4}$, akkor $16^a + 16^b + 16^c \leqq 16^{\frac{1}{4}} + 16^{\frac{1}{4}} + 16^{\frac{1}{2}} = 8$, s ez éppen a feladat állítása.

$\Big($Egyenlőség pontosan akkor van, ha a, b, c közül kettő értéke $\frac{1}{4}$, a harmadiké $\frac{1}{2}$.$\Big)$

Peták Attila (Bp., Berzsenyi D. Gimn., IV. o. t.)

II. megoldás: Ábrázoljuk az $x \mapsto 16^x = y$ függvényt az $(x; y)$ koordinátasíkon, és tekintsük a függvény grafikonjának a következő három pontját: $A = (a, 16^a)$, $B = (b, 16^b)$, $C = (c, 16^c)$. A feltételek szerint a, b, $c \geqq \frac{1}{4}$ és $a+b+c = 1$, így $a = 1-b-c \leqq \frac{1}{2}$, $b \leqq \frac{1}{2}$, $c \leqq \frac{1}{2}$ is teljesül. Tekintsük tehát a grafikon $P = \left(\frac{1}{4}; 16^{\frac{1}{4}}\right) = \left(\frac{1}{4}; 2\right)$ és $Q = \left(\frac{1}{2}; 16^{\frac{1}{2}}\right) = \left(\frac{1}{2}; 4\right)$ pontját.



1. ábra

Minthogy az $x \mapsto 16^x$ függvény konvex, ezért az ABC háromszög teljes egészében abban a tartományban van, amelyet a PQ egyenes szakasz és a P és Q közötti grafikon határol (Az 1. ábrán satírozva van).

Nézzük most az ABC háromszög $S\left(\frac{a+b+c}{3}; \frac{16^a+16^b+16^c}{3}\right) =$

$= \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}(16^a + 16^b + 16^c)\right)$ súlypontját.Ez az ABC háromszög belsejében van, így szintén a satírozott részbe esik.

Másrészt rajta van az $x=\dfrac{1}{3}$ egyenesen. Ennek az egyenesnek a PQ-val és a függvénygrafikonnal alkotott metszéspontjai közé eső szakasza van a tartományban. Az egyenes a grafikont az $\left(\dfrac{1}{3};16^{\frac{1}{3}}\right)$ pontban, a PQ szakaszt annak P-hez közelebbi harmadolópontjában, az $\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{8}{3}\right)$ pontban metszi.

Így $\dfrac{1}{3}(16^a+16^b+16^c)$ értéke az adott feltételek $\left(\dfrac{1}{4}\leqq ab,c\leqq\dfrac{1}{2},a+b+c=1\right)$ mellett $16^{\frac{1}{3}}$ és $\dfrac{8}{3}$ közé esik. Hárommal szorozva:

$$3\cdot 16^{\frac{1}{3}}\leqq 16^a+16^b+16^c\leqq 8.$$

A második egyenlőtlenség éppen a feladat állítása.

Megjegyzés: Ez utóbbi megoldás általánosítható: Ha f konvex függvény, n természetes szám, A valós, $\alpha=\dfrac{A}{n}$, $a_1+a_2+\ldots+a_n=A$ és a $a_1,a_2,\ldots,a_n\geqq\alpha$, akkor az $f(a_1)+f(a_2)+\ldots+f(a_n)$ függvény értéke akkor maximális, ha az n db a_i közül $(n-1)$-nek az értéke α (az n-edik értéke pedig $A-(n-1)\alpha$.) A bizonyítás a 2. megoldáshoz hasonlóan történik: tekintjük az $A_1A_2\ldots A_n$ (konvex) n-szöget, ahol $A_i=(a_if(a_i))$, majd ennek $S\left(\dfrac{A}{n};\dfrac{f(a_1)+\ldots+f(a_n)}{n}\right)$ súlypontját. Az egyetlen különbség az, hogy a háromszög súlypontjáról tudjuk, hogy a háromszög belsejében van, a konvex n-szög esetében ezt bizonyítani kell (és lehet). A súlypont tehát megint egy függőleges egyenesen, az $x=\dfrac{A}{n}$ egyenesen mozoghat, s ennek „legmagasabb" pontja éppen a $P(\alpha,f(\alpha))$ és $Q(A-(n-1)\alpha;f(A-(n-1)\alpha))$ pontok közötti szakasz P-hez legközelebbi „n-edelő" pontja. Ennek ordinátája éppen $\dfrac{1}{n}((n-1)f(\alpha)+f(A-(n-1)\alpha)$, ez tehát az $\dfrac{1}{n}\cdot\sum\limits_{i-1}^{n}f(a_i)$ kifejezés maximuma.

III. megoldás: A feladat még tovább is általánosítható: legyen adva az f konvex függvény, valamint az $\alpha_1\leqq\alpha_2\leqq\ldots\leqq\alpha_{n-1}\leqq\alpha_n$ számok, továbbá legyen $A\geqq\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i$. Ha $a_1,a_2,\ldots,a_n$ olyan számok, amelyekre $a_1\geqq\alpha_1$, $a_2\geqq\alpha_2,\ldots,a_n\geqq\alpha_n$ és $a_1+a_2+\ldots+a_n=A$, akkor

$$f(a_1)+f(a_2)+\ldots+f(a_n)\leqq f(\alpha_1)+f(\alpha_2)+\ldots+f(A-\sum_{1}^{n-1}\alpha_i). \tag{1}$$

Változtassuk a_1 értékét $a_1'=\alpha_1$-re, a_n értékét pedig úgy módosítjuk, hogy az a_i-k összege továbbra is A maradjon: $a_n'=a_n+a_1-\alpha_1$. Tudjuk, hogy $\alpha_1\leqq a_1$ és $\alpha_1\leqq\alpha_n\leqq a_n$. Másrészt $a_n'\geqq a_n$ (hiszen $a_1-\alpha_1\geqq 0$) és $a_n'\geqq a_1$ (ugyanis $a_n-\alpha_1\geqq\alpha_n-\alpha_1\geqq 0$).
Tehát

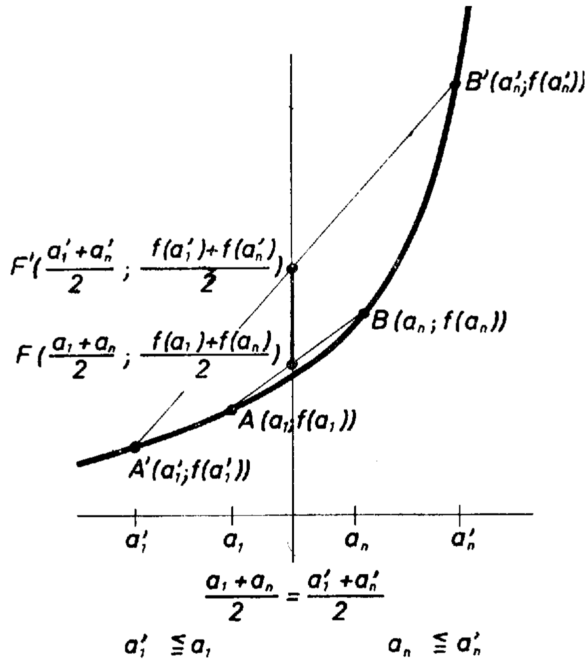
$$a_1'=\alpha_1\leqq a_1\quad a_n\leqq a'{}_n=a_n+a_1-\alpha_1.$$

Végül $a_1+a_n=a_1'+a_n'$. A két kapott feltételből már következik, hogy

$$f(a_1)+f(a_n)\leqq f(a_n')+f(a_n'). \tag{2}$$

Tekintsük ugyanis az $A(a_1,f(a_1))$, $B(a_n,f(a_n))$, $A'(a_1',f(a_1'))$, $B'(a_n',f(a_n'))$, pontokat valamint az AB, $A'B'$ szakaszokat. Előbbi felezőpontja legyen F, utóbbié F'; nyilván

$$F=\left(\frac{a_1+a_n}{2};\frac{f(a_1)+f(a_n)}{2}\right)\quad\text{és}\quad F'=\left(\frac{a_1'+a_n'}{2};\frac{f(a_1')+f(a_n')}{2}\right).$$



2. ábra

Mivel $a_1+a_n = a_1'+a_n'$, a két felezőpont abszcisszája egyenlő. Másrészt f konvexitása és az $a_1' \leqq a_1$, $a_n \leqq a'{}_n$ feltétel miatt az $\overline{AB}$ szakasz teljesen az $\overline{A'B'}$ szakasz alatt helyezkedik el. (l. a 2. ábrát), így az $\overline{AB}$ szakasz F felezőpontjának ordinátája is kisebb az $\overline{A'B'}$ szakasz F' felezőpontjának ordinátájánál. Ebből pedig éppen (2) következik.
Ezzel beláttuk, hogy

$$f(a_1)+f(a_2)+\ldots+f(a_n) \leqq f(\alpha_1)+f(a_2)+\ldots+f(a_{n-1}+f(a_n').$$

Továbbra is fennáll $a_2 \geqq \alpha_2, a_3 \geqq \alpha_3, \ldots, a_n' \geqq \alpha_n$ és $a_2+\ldots+a_{n-1}+a_n' = A-\alpha_1$, ezzel a fenti gondolatmenet (a_2, a_n')-re, majd (a_3, a_n')-re stb. is megismételhető; $(n-1)$-szeri ismétlés után megkapjuk (1)-et.

Benkő Dávid (Bp., Móricz Zs. Gimn., IV. o. t.)