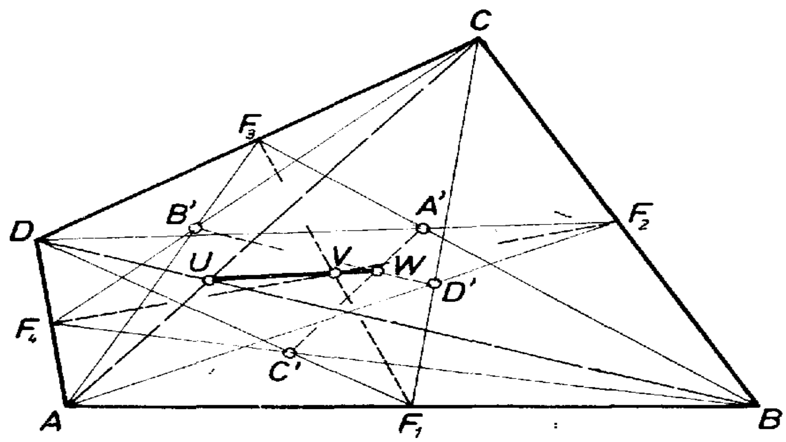
Jelöljük a négyszög csúcsait A, B, C, D-vel, az oldalfelező pontokat pedig sorra F_1, F_2, F_3, F_4-gyel. A BD átló a négyszöget két háromszögre bontja. Az ABD háromszög súlypontja C', a BCD háromszögé pedig A'. A négyszöglemez W súlypontja rajta lesz az $A'C'$ szakaszon. A négyszöget az AC átló is két háromszögre bontja. Ezek súlypontja legyen B', illetve D'. A négyszög súlypontja a $B'D'$ szakaszon is rajta lesz, ezért a W pontot $A'C'$ és $B'D'$ metszéspontjaként kapjuk meg.



1. ábra

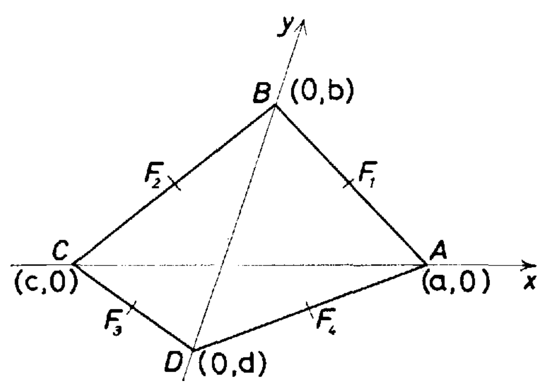
Vegyük észre ezután, hogy az $A'D'$ szakasz az AF_2D háromszög F_2 csúcsából kiinduló két oldal F_2-höz közelebbi harmadolópontját köti össze, ezért

$$A'D' \quad \text{párhuzamos} \quad AD\text{-vel} \quad \text{és} \quad A'D' = \frac{AD}{3}.$$

Hasonló igaz az $A'B'$, $B'C'$ és $C'D'$ szakaszokra. Tehát az $A'B'C'D'$ négyszög szögei megegyeznek az $ABCD$ négyszög szögeivel, és a megfelelő oldalak aránya 1:3. A megfelelő oldalak párhuzamossága miatt a két négyszög hasonló helyzetű is, ezért van hasonlósági pontjuk. A hasonlósági pontot az egymásnak megfelelő pontpárok segítségével fogjuk meghatározni. Legyen $A'D'$ felezőpontja F_4'. A hasonlóságnál ez a pont F_4 képe, és rajta van az F_2F_4 szakaszon, így a hasonlóság centruma is rajta van az F_2F_4-en. Hasonlóan láthatjuk be, hogy a centrum rajta van az F_1F_3 szakaszon is, tehát a hasonlóság középpontja a V pont.

Mivel ebben a hasonlóságban az átlók U metszéspontjának képe a képnégyszög átlóinak W metszéspontja, ezért az U, V, W pontok egy egyenesre esnek, és a hasonlóság aránya 1:3 lévén $WV : VU = 1 : 3$, amint azt bizonyítani kellett.

II. megoldás. Vegyünk fel egy (esetleg ferdeszögű) koordinátarendszert az $ABCD$ négyszög átlóira illeszkedő tengelyekkel. Használjuk a 2. ábra jelöléseit.



2. ábra

Könnyű belátni, hogy a szakasz felezőpontjának koordinátáit, ill. a súlypont koordinátáit ferdeszögű koordináta–rendszerben ugyanúgy számíthatjuk ki, mint derékszögűben.

Az F_1 és F_3 koordinátái:

$$F_1\left(\frac{a}{2};\ \frac{b}{2}\right) \quad \text{és} \quad F_3\left(\frac{c}{2};\ \frac{d}{2}\right),$$

mivel F_1, F_2, F_3, F_4 paralelogramma, ezért V koordinátái:

$$V\left(\frac{a+c}{4};\ \frac{b+d}{4}\right).$$

Ezután meghatározzuk az átlók által létrehozott háromszögek súlypontját:

Az ABC háromszög súlypontja: $S_1\left(\frac{a+c}{3},\ \frac{b}{3}\right)$,

az ACD háromszög súlypontja: $S_2\left(\frac{a+c}{3},\ \frac{d}{3}\right)$,

a BCD háromszög súlypontja: $S_3\left(\frac{c}{3},\ \frac{b+d}{3}\right)$,

a DAB háromszög súlypontja: $S_4\left(\frac{a}{3},\ \frac{b+d}{3}\right)$.

Könnyen látható, hogy S_1S_2 az y, S_3S_4 pedig az x tengellyel párhuzamos, ezért W koordinátái: $W\left(\frac{a+c}{3},\ \frac{b+d}{3}\right)$ (hiszen a W pont az S_1S_2 és S_3S_4 egyenesek metszéspontja).

Tekintsük ezután a $\overrightarrow{WV}$ és $\overrightarrow{VU}$ vektorokat:

$$\overrightarrow{WV}=\left(-\frac{a+c}{12};\ -\frac{b+d}{12}\right),\quad \overrightarrow{VU}=\left(-\frac{a+c}{4};\ -\frac{b+d}{4}\right).$$

Láthatjuk, hogy $\overrightarrow{3WV}=\overrightarrow{VU}$, ami éppen a feladat állítása.

Schultz János (Törökszentmiklós, Bercsényi M. Gimn., IV. o. t.)