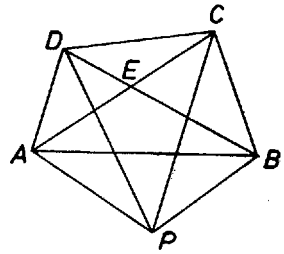
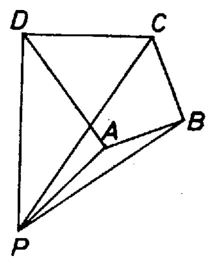
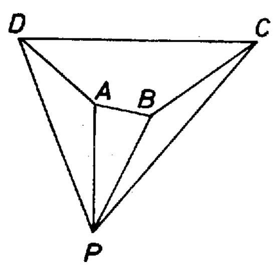
Bebizonyítjuk, hogy a négyszög síkjában legfeljebb egy, a feladat feltételeinek megfelelő P pont létezik. Lapunk 1989/2. számában az 50. oldaltól kezdődően megjelent a Kürschák József matematikaverseny feladatainak megoldása. Itt az 1. feladat I. megoldásában azt olvashatjuk, hogy ha a konvex négyszög belsejében van a feladat szerinti P pont, akkor az egyfelől az egyik átló felezőpontja, másfelől a négyszög belsejében legfeljebb egy ilyen pont lehet. Tegyük fel ezután, hogy létezik a feltételeknek eleget tevő P pont a négyszögön kívül. A pont különféle elképzelhető helyzeteit az 1., 2. és 3. ábrákon láthatjuk.



1. ábra



2. ábra



3. ábra

Könnyű belátni, hogy a 2. és 3. ábra szerinti esetekkel nem kell foglalkoznunk, mivel ekkor a PAB, PBC, PCD, PDA háromszögek egyike tartalmaz egy másikat, és így annál nagyobb területű. Az 1. ábrán az egyenlő területű PBA és PBC háromszögek PB oldala közös, tehát ehhez az oldalhoz tartozó magasságuk is egyenlő. Ezért PB párhuzamos AC-vel. Hasonló okokból AP és BD is párhuzamosak. Tehát az $APBE$ négyszög paralelogramma, amelyben P éppen E tükörképe AB felezőpontjára. (E a négyszög átlóinak a metszéspontja.) Jelölje pl. a PAB háromszög területét t_{PAB}. Az előbbi észrevétel szerint $t_{PAB} = t_{EAB}$, és ez a terület éppen a négyszög területének a fele. Ugyanis feltevésünk szerint P olyan, hogy $t_{PAB} = t_{PBC} = t_{PCD} = t_{PDA}$, és a PAB-n kívüli három háromszög területének összege éppen t_{PAD}-vel több a négyszög területénél.

Mivel t_{EAB} a négyszög területének a fele, az AC és BD átlók egyike se felezi a négyszög területét. Ezért ilyenkor az említett Kürschák versenyfeladat megoldása szerint a négyszög belsejében nincsen megfelelő pont, és külső pont is csak egy.

A feladat kérdésére tehát azt felelhetjük, hogy legfeljebb egy megfelelő P pont létezik.

Fölmerülhet a kérdés, hogy létezik-e olyan $ABCD$ konvex négyszög, amelyhez található a feladat követelményei szerinti P pont, a négyszögön kívül. A figyelmes olvasó a KöMaL 1989/2. száma 51. oldalán az I. megoldás utáni 3. megjegyzésben találhat konstrukciót ilyen négyszögre.

Macskási Zsolt (Bp., Apáczai Csere János Gimn. III. o. t.)
dolgozata alapján.