**I.megoldás.** Mivel $a$ és $b$ szerepe a feladatban teljesen szimmetrikus, feltehetjük, hogy $a \leqq b$. Ekkor $a^2 - 4b \leqq a^2 - 4a$, s mivel $a^2 - 4b$ négyzetszám, s így nem negatív, ezért $a^2 - 4a \geqq 0$ A feladat kikötése szerint $a$ pozitív, tehát $a \geqq 4$.

Tudjuk, hogy $4 \leqq a \leqq b$. Ha $b = 4$, akkor $a = 4$, s ez megoldása is a feladatnak. Ha $b > 4$, azaz $b \geqq 5$, akkor $b^2 - 4a$ beszorítható két közeli négyzetszám közé: $b^2 > b^2 - 4a \geqq b^2 - 4b > (b-3)^2$ Minthogy $b^2 - 4a$ is négyzetszám, csak két lehetőség marad: $b^2 - 4a = (b-1)^2$ vagy $b^2 - 4a = (b-2)^2$. Az előbbi esetben $4a = 2b - 1$, itt a bal oldal páros, a jobb oldal nem, ez tehát nem fordulhat elő. Egy eset maradt még: $b^2 - 4a = (b-2)^2$, ahonnan $a = b - 1$. A feltétel szerint így $a^2 - 4b = (b-1)^2 - 4b = (b-3)^2 - 8$ négyzetszám. Ha $1 \leqq b \leqq 5$, akkor e kifejezés értéke negatív, $b = 7$ esetén pedig 8, tehát nem négyzetszám; $b = 6$ esetén viszont négyzetszám. Végül $b \geqq 8$ esetén $(b-3)$, eltérése a legközelebbi négyzetszámtól, $(b-4)^2$-től is $2b - 7 \geqq 9$, ezért ilyenkor már $(b-3)^2 - 8$ nem lehet négyzetszám. Az $a = b = 4$ megoldás mellett tehát összesen még egy megoldást találtunk: $b = 6, a = 5$, ekkor $b^2 - 4a = 6^2 - 4 \cdot 5 = 4^2$ és $a^2 - 4b = 5^2 - 4 \cdot 6 = 1$, valóban négyzetszámok. Nyilván ugyanígy megoldás ennek szimmetrikus párja, az $a = 6$, $b = 5$ számpár is.

**II.megoldás.** Ismeretes, hogy ha $A$ és $B$ egészek, úgy az $x^2 - Ax + B = 0$ egyenlet megoldásai pontosan akkor egészek, ha az egyenlet diszkriminánsa $A^2 - 4B$ négyzetszám. Feladatunk tehát így fogalmazható át: milyen $a$ és $b$ pozitív egészekre lesznek egészek mind az $x^2 - ax + b = 0$, mind az $y^2 - by + a = 0$ egyenlet gyökei? Jelölje $x_1$ és $x_2$ az előbbi, $y_1$ és $y_2$ az utóbbi egyenlet gyökeit. A gyökök és együtthatók közötti összefüggés szerint

$$x_1 + x_2 = a = y_1 y_2 \quad \text{és} \quad y_1 + y_2 = b = x_1 x_2,$$

és $a > 0$, $b > 0$ miatt $x_1$, $x_2$, $y_1$, $y_2$ is pozitív. A feladat tehát azoknak a pozitív egész $x_1$, $x_2$, $y_1$, $y_2$ számoknak a meghatározása, amelyekre $x_1 + x_2 = y_1 y_2$ és $y_1 + y_2 = x_1 x_2$. Éppen ez volt az 1987. évi Kürschák-verseny 1. feladata, amelynek megoldása szerint (l. KöMaL 1988/2. sz. 50. old.) lényegében két számnégyes felel meg: az egyik $x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = 2$, ekkor $a = b = 4$, valamint $x_1 = 1$, $x_2 = 5$, $y_1 = 2$, $y_2 = 3$ és ennek szimmetrikus változatai (5, 1, 2, 3; 5, 1, 3, 2; 1, 5, 3, 2; 2, 3, 1, 5; 2, 3, 5, 1; 3, 2, 1, 5; 3, 2, 5, 1.) Ebben az esetben $a = 6$ és $b = 5$ (vagy $a = 5$ és $b = 6$).

Ezek nyilván megoldások és más megoldás nincs.