I. megoldás. Jelöljük k-val a háromszög kerületét. Ekkor

$$k^2=(a+b+c)^2=(a^2+b^2+c^2)+2(ab+bc+ac)=$$
$$=\frac{1}{2}(a-b)^2+\frac{1}{2}(b-c)^2+\frac{1}{2}(c-a)^2+3(ab+ac+bc).$$

Az $ab+ac+bc=12$ feltételt is figyelembe véve kapjuk, hogy

$$(1)\qquad 2k^2-72=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2.$$

Itt a jobb oldal nem negatív, tehát $k^2\geqq 36$, $k\geqq 6$, és egyenlőség csak $a=b=c$ esetén áll. Másrészt $a=b=c=2$ esetén $k=6$ és $ab+bc+ca=12$, így a kerület *minimuma* 6.

A maximum meghatározásához is (1)-et fogjuk használni. A háromszög-egyenlőtlenséget írhatjuk a következő alakban is:

$$(2)\qquad |a-b|\leqq c,\quad |b-c|\leqq a\quad \text{és}\quad |a-c|\leqq b.$$

Így (1) jobb oldala nem nagyobb $c^2+a^2+b^2=k^2-2(ab+bc+ca)=k^2-24$-nél, vagyis

$$2k^2-72\leqq k^2-24,\quad k^2\leqq 48,\quad k\leqq\sqrt{48}=4\sqrt{3}.$$

Ezzel kaptunk egy felső becslést a kerületre. Kérdés: felveszi-e k ezt az értéket? Nyilván pontosan akkor veszi fel, ha (2)-ben mindenütt egyenlőség van, amihez meg kell engednünk az elfajuló háromszögeket is. Ha ezt megengedjük és feltesszük, hogy $a\geqq b\geqq c$, akkor azt kapjuk, hogy k a maximális $4\sqrt{3}$ értéket pontosan akkor veszi fel, ha $a-b=c$, $b-c=a$ és $a-c=b$. Az első két egyenletet összeadva $c=0$ adódik, s ebből (mindhárom egyenletben) $a=b$ következik. Végül az $ab+ac+bc=12$ feltétel $c=0$, $a=b$ mellett azt adja, hogy $a=b=2\sqrt{3}$.

Azt kaptuk tehát, hogy a kerület hossza legfeljebb $4\sqrt{3}$, és pontosan $4\sqrt{3}$ abban az elfajuló egyenlő szárú háromszögben lesz, amelynek alapja 0, két szára $2\sqrt{3}$ hosszú. A kerület értéke tehát 6 és $4\sqrt{3}$ között változik.

II. megoldás. A számtani és négyzetes közép közötti összefüggés szerint

$$\left(\frac{k}{3}\right)^2=\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2\leqq\frac{a^2+b^2+c^2}{3},$$

tehát

$$k^2\leqq 3(a^2+b^2+c^2)=3(k^2-2(ab+bc+ca))=3k^2-72,$$

és innen $k^2\geqq 36$, $k\geqq 6$. Itt egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $a=b=c=2$, tehát a kerület minimuma 6.

A maximum megkereséséhez tegyük fel, hogy $a\geqq b\geqq c$. Ekkor a háromszög-egyenlőtlenség szerint $a\leqq b+c$, amit a nemnegatív a-val szorozva azt kapjuk, hogy

$$a^2\leqq ab+ac\leqq ab+ac+bc=12.$$

Másrészt $b\geqq c\geqq 0$ miatt $c^2\leqq bc$ és $a\geqq b\geqq 0$ miatt $b^2\leqq ab$, tehát

$$b^2+c^2\leqq ab+bc\leqq ab+ac+bc=12.$$

A két egyenlőséget összeadva

$$a^2+b^2+c^2\leqq 24,$$

vagyis $k^2-2(ab+ac+bc)\leqq 24$, $k^2-24\leqq 24$, $k^2\leqq 48$. Ha végignézzük, hogy milyen feltétellel áll egyenlőség az összeadott két egyenlőtlenségben, ismét könnyen láthatjuk, hogy csak $c=0$, $b=a$ esetén.

Megjegyzés. Be lehet látni, hogy a kerület hossza 6 és $4\sqrt{3}$ között bármely értéket felvesz, és a $4\sqrt{3}$ kivételével minden értéket felvesz *nem* elfajuló háromszögben is.