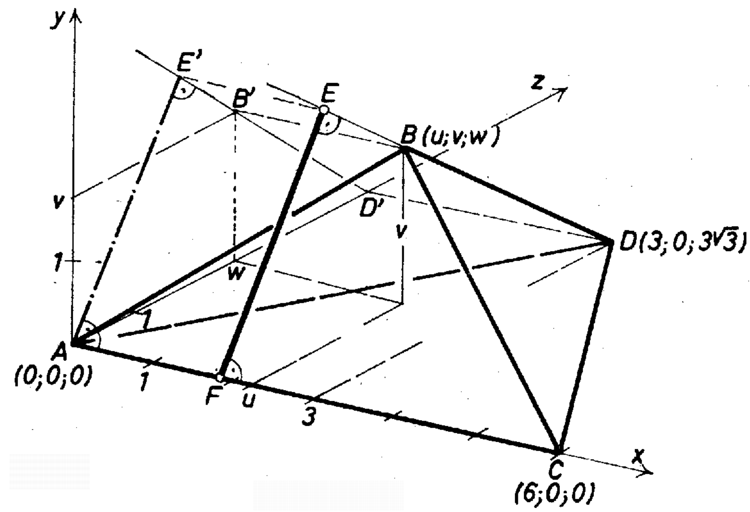
Helyezzük el a tetraédert az ábrán látható módon egy térbeli derékszögű koordinátarendszerben. Használjuk az ábra jelöléseit.



Az élhosszak ismeretében:

$$(1) \qquad \begin{aligned} u^2+v^2+w^2 &= 4^2 \\ (3-u)^2+v^2+(3\sqrt{3}-w)^2 &= 3^2 \\ (6-u)^2+v^2+w^2 &= 5^2. \end{aligned}$$

Ennek az egyenletrendszernek a megoldása:

$$u=\frac{9}{4}; \quad v=\sqrt{\frac{311}{108}}; \quad w=\frac{59\sqrt{3}}{36}.$$

Így ismerjük a B pont koordinátáit is, és föl tudjuk írni a $\overrightarrow{DB}$ vektort:

$$(2) \qquad \overrightarrow{DB}=\left(-\frac{3}{4};\ \sqrt{\frac{311}{108}};\ -\frac{49\sqrt{3}}{36}\right).$$

A BD egyenes irányvektora és D pontja segítségével az egyenes paraméteres egyenletrendszere:

$$(3) \qquad \begin{aligned} x&=3-\frac{3}{4}t, \\ y&=\sqrt{\frac{311}{108}}t, \\ z&=3\sqrt{3}-\frac{49\sqrt{3}}{36}t. \end{aligned}$$

Feladatunk a BD és AC egyenesek távolságának meghatározása. Ez ábránkon az EF szakasz hossza. Mivel EF merőleges az x tengelyre, párhuzamos az $(y;\ z)$ síkkal, ezért erre a síkra eső vetülete, $E'A$, ugyanolyan hosszúságú mint EF. A BD és EF által bezárt derékszög vetülete is derékszög, hiszen e derékszög egyik szára párhuzamos a vetület síkjával. Ezért a keresett távolság úgy is meghatározható, hogy fölírjuk az $(y;\ z)$ síkban a $B'D'$ egyenes egyenletét, és kiszámítjuk az egyenes és az origó távolságát.

A (3) egyenletrendszerből $t=\sqrt{\frac{108}{311}}y$, így $B'D'$ egyenlete:

$$(4) \qquad \frac{49\sqrt{3}}{36}\sqrt{\frac{108}{311}}\,y+z=3\sqrt{3}.$$

Most fölhasználjuk a pont és egyenes távolságára vonatkozó ismert képletet. Ez a szokásos jelölésekkel a következő. Az $Ax+By+C=0$ egyenes és a $P(x_1;\ y_1)$ pont távolsága:

$$d=\left|\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|.$$

Esetünkben az egyenes egyenlete a (4) egyenlet, a pont pedig a (0; 0); így a keresett távolság:

$$d=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{\frac{49^2\cdot 3}{36^2}\cdot\frac{108}{311}+1}}=\sqrt{\frac{3732}{405}}\approx 3{,}0356.$$

Lázár Zsolt (Kaposvár, Táncsics M. Gimn., III. o. t.)