Legyen H zárt halmaz, és tegyük fel, hogy $0 \notin H$. Ekkor H minden elemével annak kétszerese is H-ban van. Ha ugyanis $x \in H$, és $y = x$ – amit a feladat szövege megenged! – akkor vagy $x + y = 2x$, vagy $|x - y| = 0$ H-ban van, de az utóbbit kizártuk. Tehát ha $0 \notin H$, és H zárt, akkor vagy üres, vagy minden elemének kétszeresét is tartalmazza, tehát végtelen halmaz, de a feladat feltétele mindkét esetet kizárja. Legyen ezek után H egy nem üres, $n + 1$ elemű ($n \geqq 0$) zárt halmaz. Az előbbiek szerint ekkor $0 \in H$. Legyenek H elemei rendre: $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_n$.

1 . Belátjuk, hogy ha $0 \leqq i \leqq n$, akkor $a_i + a_{n-i} = a_n$. Ha $i \geqq 1$, akkor $a_n + a_i > a_n$, tehát az $a_n + a_i$ összeg már nincs benne H-ban. H zártsága miatt $|a_n - a_i| = a_n - a_i$ $(i \leqq n)$ van H-ban. Ha $i = 0$, akkor $a_n - a_0 = a_n$ szintén H-ban van. Tehát az $n + 1$ elemű

$$0 = a_n - a_n < a_n - a_{n-1} < \ldots < a_n - a_i < \ldots < a_n - a_1 < a_n - a_0 = a_n$$

sorozat is H elemeit sorolja fel nagyság szerint, ezért

$$a_0 = a_n - a_n, \quad a_1 = a_n - a_{n-1}, \ldots, a_1 = a_n - a_i, \ldots,$$
$$a_{n-1} = a_n - a_1, \quad a_n = a_n - a_0,$$

ahogy állítottuk.

2. Most belátjuk, hogy ha $n \geqq 4$ és $0 \leqq i \leqq n - 1$, akkor $a_{n-1} = a_i + a_{n-1-i}$.

Tekintsük először $i \geqq 2$ esetén az $a_{n-1} + a_i$ összeget. Ez nagyobb az $a_{n-1} + a_1$ összegnél $(i \geqq 2)$, amely viszont a_n a fentiek szerint. Így az $a_{n-1} + a_i$ összeg nincs benne H-ban, ezért az $|a_{n-i} - a_i| = a_{n-1} - a_i$ különbségnek kell H-ban lennie (most használtuk ki az $i \leqq n - 1$ feltételt). Nézzük az $n - 2$ elemű

$$a_0 = a_{n-1} - a_{n-1} < a_{n-1} - a_{n-2} < \ldots < a_{n-1} - a_2$$

sorozatot; ez csupa H-beli elemből áll. Az itteni utolsó elem, $a_{n-1} - a_2$ kisebb $(a_n - a_2)$-nél, amiről az 1. pontban beláttuk, hogy a_{n-2}. A felsorolás tehát a H halmazból a_{n-2}-nél *kisebb* elemeket sorol fel nagyság szerint, ezekből azonban éppen $n - 2$ darab van. Tehát

$$a_0 = a_{n-1} - a_{n-1}, \quad a_1 = a_{n-1} - a_{n-2}, \ldots,$$
$$a_i = a_{n-1} - a_{n-1-i}, \ldots, a_{n-3} = a_{n-1} - a_2.$$

Látszólag készen vagyunk: ha $0 \leqq i \leqq n - 3$, akkor $a_i + a_{n-1-i} = a_{n-1}$. Ha $i = n - 1$, akkor $a_i + a_{n-1-i} = a_{n-1} + a_0 = a_{n-1}$. Végül, ha $i = n - 2$, akkor azt kell belátnunk, hogy $a_{n-2} + a_1 = a_{n-1}$, ami a fenti egyenlőségsorozat második helyén áll. Igen ám, de ez a második egyenlőség csak $n - 3 \geqq 1$ esetén szerepel, azaz ha $n \geqq 4$. Amikor $n = 3$, akkor csak a semmitmondó $a_0 = a_3 - a_3$-ból áll a fenti egyenlőségsorozat, $n \leqq 2$ esetén pedig egyenlőséget sem kapunk! De $n \geqq 4$ esetén valóban minden $0 \leqq i \leqq n - 1$ esetén megkaptuk a kívánt állítást.

3. Most már az $n \geqq 4$ esetben hamar célba érünk. Tekintsük ugyanis $0 \leqq i \leqq n - 1$-re az $a_{i+1} - a_i$ különbségét! Itt $a_{i+1} = a_n - a_{n-1-i}$, az 1. pont szerint, és $a_i = a_{n-1} - a_{n-1-i}$, a 2. pont szerint. Ezért $a_{i+1} - a_i = a_n - a_{n-1} = a_1$. Innen pedig nyilvánvaló, hogy $0 \leqq i \leqq n - 1$ esetén $a_{i+1} = (i + 1)a_1$, azaz minden $i \geqq 1$-re $a_i = ia_1$. De $i = 0$-ra $a_0 = 0 \cdot a_1 = 0$, ezért $H = \{0,\ a_1,\ 2a_1,\ \ldots,\ na_1\} = S(n_1 a_1)$ alakú. Ha tehát $n \geqq 4$, azaz H *legalább ötelemű*, akkor $S(n_1 a_1)$ alakú.

4. Tekintsük most az $n = 0,\ 1,\ 2$ eseteket. Ha $n = 0$, akkor $H = \{0\} = S(0,\ \alpha)$. Ha $n = 1$, akkor $H = \{0,\ a_1\} = S(1,\ a_1)$. Ha pedig $n = 2$, akkor az 1. pont szerint $a_2 = a_1 + a_1 = 2a_1$, tehát $H = \{0,\ a_1,\ 2a_1\} = S(2,\ a_1)$.

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Megjegyezzük, hogy ha H-nak éppen négy eleme van, akkor az 1. pont szerint $a_3 = a_1 + a_2$ (az 1. pont más érdemlegeset nem mond, a 2. pont pedig nem igaz.). Másrészt minden pozitív $a_1,\ a_2$ esetén a négyelemű $H = \{0,\ a_1,\ a_2,\ a_1 + a_2\}$ halmaz valóban zárt és ha $a_2 \neq 2a_1$, akkor nem $S(3,\ a_1)$ alakú. Könnyen ellenőrizhető, hogy ebben az esetben a 2. pont állítása valóban nem teljesül, hiszen az $i = 1,\ n - 1 = 2,\ n - 1 - i = 1$ helyettesítéssel megkívánná, hogy $a_2 = 2a_1$ legyen. Nem „ügyetlenségből” kellett tehát a 2. pontban az $n \geqq 4$ megkötést tennünk.

Máté Nóra (Bp., Fazekas M. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. Sokan nem vették észre, hogy a feladat szövegében x és y-ról csak annyit tettünk fel, hogy H elemei, tehát egyenlők is lehetnek. Enélkül a feladat állítását megcáfolni vélték. Valóban: ha csak annyit kötünk ki H-ról, hogy bármely két különböző elemével azok összegét, vagy különbségük abszolutértékét is tartalmazza, akkor bármely pozitív $a_1,\ a_2$-re az $\{a_1,\ a_2\ a_1 + a_2\}$ és az $\{a_1,\ 2a_1,\ 3a_1,\ \ldots,\ na_1\}$ halmazok is megfelelnének. Könnyű meggondolni, hogy több ellenpélda viszont akkor sincs, hiszen ha egy ilyen tulajdonságú halmazhoz hozzávesszük a nullát, akkor zárttá válik. Ha valaki nemcsak „megcáfolni” akarta a feladatot, hanem megoldotta az általa félreértett feladatot (ez esetben H jellemzése, mint látjuk, alig bonyolultabb, és a bizonyítás ugyanúgy megy), akkor csak 1 pontot vontunk le. De egy félreértett feladat megcáfolásáért nem járt pont.

2. Volt egy másikféle „cáfolat” is: többen is „megsokszorozták” egy zárt halmaz elemeit és pl. azt mondták, hogy a $\{0, 0, 0, 6, 6, 6\}$ hat elemű halmaz nyilván zárt és nyilván nem $S(n,\ \alpha)$ alakú. Aki így érvelt, az a halmaz fogalmával sincs tisztában. Ugyanis a $\{0, 0, 0, 6, 6, 6\}$ halmaznak csak két eleme van: a 0 és a 6. Egy halmaznak nincsenek „azonos, de különböző” elemei. Három különböző alma, három különböző elem lehet egy halmazban; három különböző nulla is

lehetne, ha – volna. De nincs! Ezért tehettük fel a bizonyításban az $n+1$ elemű H halmazról, hogy elemei szigorúan monoton nőnek.

Valószínűnek tartom, hogy akik ezt a „cáfolati” módot választották, a halmazt a számítógépes listákkal keverték össze. Egy lista tartalmazhat három nullát – de éppen ezért nem hasonlít a halmazra. (Annál inkább az ún. rendezett halmazokra. Ajánljuk, nézzenek utána, mi a különbség halmaz és rendezett halmaz között.)

3. A bizonyításunk másképp is befejezhető. A 2. pontban elmondottak többet bizonyítanak: ha $4 \leqq k \leqq n$, és $0 \leqq i \leqq k-1$, akkor $a_{k-1} = a_i + a_{k-1-i}$. (Ez k-ra vonatkozó, n-től lefelé lépő indukcióval ugyanúgy bizonyítható, mint a 2. pont állítása.)

De mi van a $k = 1,\ 2,\ 3$ esetekben? Ha $k = 1$, csak az $a_0 = a_0 + a_0$ állítás, ha $k = 2$, az $a_1 = a_1 + a_0$ állítás adódik, amelyek triviálisak. A $k = 3$ esetben a triviális $a_2 = a_0 + a_2$ -n kívül az $a_2 = 2a_1$ állítás is, ami viszont $a_4 = a_2 + a_2 = a_3 + a_1 = (a_1 + a_2) + a_1$ alapján következik. Így állításunk minden $1 \leqq k \leqq n$-re igaz, tehát (az 1. ponttal együtt) $n \geqq 4$ esetén minden i és j-re megkapjuk, hogy $a_i + a_j = a_{i+j}$. Tehát $a_0 = 0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ számtani sorozat, azaz $H = S(n,\ a_1)$ alakú.