

I. megoldás. Először azt bizonyítjuk be, hogy ha n pozitív egész, akkor 5^{2n} felbontható két olyan négyzetszám összegére, amelyek egyike sem osztható 5-tel. Teljes indukciót alkalmazunk. Az $n = 1$ esetben

$$5^2 = 25 = 3^2 + 4^2.$$

Tegyük fel, hogy $n = k$ -ra igaz az állítás, tehát

$$(1) \quad 5^{2k} = a_k^2 + b_k^2,$$

és $a_k b_k$ nem osztható 5-tel. Ekkor $3a_k + 4b_k$ és $3a_k - 4b_k$ közül legalább az egyik nem osztható 5-tel, mert összegük $6a_k$ sem osztható 5-tel. Könnyen ellenőrizhető, hogy

$$\begin{aligned} (3a_k + 4b_k)^2 + (4a_k + 3b_k)^2 &= (3a_k - 4b_k)^2 + (4a_k + 3b_k)^2 = \\ &= (3^2 + 4^2)(a_k^2 + b_k^2) = 5^2 5^{2k} = 5^{2(k+1)}. \end{aligned}$$

Legyen tehát $a_{k+1} = 3a_k + 4b_k$ és $b_{k+1} = 4a_k - 3b_k$, ha $3a_k + 4b_k$ nem osztható 5-tel, ellenkező esetben legyen $a_{k+1} = 3a_k - 4b_k$ és $b_{k+1} = 4a_k + 3b_k$. Ekkor, mint láttuk, $5^{2(k+1)} = a_{k+1}^2 + b_{k+1}^2$, és $a_{k+1} b_{k+1}$ nem osztható 5-tel. De akkor $5^{2(k+1)} - a_{k+1}^2 = b_{k+1}^2$ sem osztható 5-tel, így b_{k+1} sem. Ezzel beláttuk, hogy $n \geq 1$ esetén 5^{2n} -nek van olyan $a_n^2 + b_n^2$ alakú felbontása, ahol $a_n b_n$ nem osztható 5-tel.

Ezután már könnyű bizonyítani, hogy 5^{2n} (legalább) n különböző módon áll elő két négyzetszám összegeként. Ha ugyanis k pozitív egész, és nem nagyobb n -nél, akkor

$$5^{2n} = 5^{2k} 5^{2(n-k)} = (a_k^2 + b_k^2)(5^{n-k})^2 = (5^{n-k} a_k)^2 + (5^{n-k} b_k)^2.$$

Itt $5^{n-k} a_k$ és $5^{n-k} b_k$ egész és 5^{2n} -nek pontosan $(n - k)$ -edik hatványával osztható. Ebből viszont következik, hogy ez az elő állítás minden k -ra különböző. Minthogy k éppen n darab különböző értéket vehet fel, találtunk 5^{2n} -nek n különböző előállítását két négyzetszám összegeként.

II. megoldás. Legyen j pozitív egész, és tekintsük az $a_j = 4j$, $b_j = 4j^2 - 1$, $c_j = 4j^2 + 1$ számhármast. Könnyen ellenőrizhető, hogy $a_j^2 + b_j^2 = 16j^2 + (4j^2 - 1)^2 = (4j^2 + 1)^2 = c_j^2$, tehát pitagoraszi számhármastól van szó. Legyen $s_n = c_1 c_2 \dots c_n = (4 \cdot 1^2 + 1)(4 \cdot 2^2 + 1) \dots (4n^2 + 1)$. Azt állítjuk, hogy ekkor $t_n = s_n^2$ legalább n különböző módon áll elő két négyzetszám összegeként.

Nyilvánvaló ugyanis, hogy az $a_j^2 + b_j^2 = c_j^2$ egyenleteket c_j^2 -tel osztva és s_n^2 -tel szorozva a következő n darab egyenlethez jutunk:

$$(1) \quad \begin{aligned} \left(a_1 \frac{s_n}{c_1}\right)^2 + \left(b_1 \frac{s_n}{c_1}\right)^2 &= s_n^2 = t_n \\ \left(a_j \frac{s_n}{c_j}\right)^2 + \left(b_j \frac{s_n}{c_j}\right)^2 &= s_n^2 = t_n \\ &\vdots \\ \left(a_n \frac{s_n}{c_n}\right)^2 + \left(b_n \frac{s_n}{c_n}\right)^2 &= s_n^2 = t_n. \end{aligned}$$

Itt $\frac{s_n}{c_j}$ az s_n definíciója miatt egész, tehát a fenti n egyenlet t_n -nek n darab előállítását adja meg két négyzetszám

összegeként. Be kell látnunk, hogy n különböző egyenletről van szó. Világos, hogy $b_1 < a_1$, tehát $b_1 \frac{s_n}{c_1} < a_1 \frac{s_n}{c_1}$, és $j \geq 2$

esetén a $a_j = 4j < 4j^2 - 1 = b_j$, így a $a_j \frac{s_n}{c_j} < b_j \frac{s_n}{c_j}$. Elég azt belátnunk, hogy $\frac{a_1}{c_1} s_n, \frac{a_2}{c_2} s_n, \dots, \frac{a_j}{c_j} s_n, \dots, \frac{a_n}{c_n} s_n$ páronként

különböző számok. Ez pedig abból következik, hogy az $\frac{a_j}{c_j} = \frac{1}{j + \frac{1}{4j}}$ sorozat szigorúan monoton csökken.

Ezzel beláttuk, hogy $t_n = s_n^2$ valóban (legalább) n különböző módon bontható fel két négyzetszám összegeként.

III. megoldás. Az előbbi megoldás gondolatát némileg általánosítva, azt látjuk be, hogy ha

$$(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), \dots, (a_n, b_n, c_n)$$

n darab különböző, de egyébként tetszőleges ún. primitív pitagoraszi számhármast (azaz $a_j^2 + b_j^2 = c_j^2$ és a_j, b_j, c_j páronként relatív prímek $j = 1, 2, \dots, n$ -re), akkor $t_n = s_n^2 = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ legalább n különböző módon áll elő

két négyzetszám összegeként. Az (1) alatt felírt n egyenlet ugyanis most is fennáll, és $a_j \frac{s_n}{c_j}, b_j \frac{s_n}{c_j}$ most is egész. Azt kell csak belátnunk, hogy ez az n egyenlet most is n *különböző* egyenlet. Nyilván feltehetjük, hogy $a_j < b_j$, s ekkor elég azt belátni, hogy az $\frac{a_j s_n}{c_j}$ számok páronként különböznek. Tegyük fel, hogy $\frac{a_i s_n}{c_i} = \frac{a_j s_n}{c_j}$. Ekkor $a_i c_j = a_j c_i$. De itt a_i és c_i relatív prímek, ezért a_j osztható a_i -vel. Másrészt a_i is osztható a_j -vel, tehát $a_i = a_j$. Ebből viszont $c_i = c_j$ következik, tehát az (a_i, b_i, c_i) és az (a_j, b_j, c_j) számhármass azonos, ezért $i = j$. Az $\frac{a_j s_n}{c_j}$ számok tehát valóban páronként különböznek.

Ezzel beláttuk, hogy t_n valóban (legalább) n különböző módon áll elő két négyzetszám összegeként.

Mezei József (Bp. Berzsenyi D. Gimn. IV. o.)

Megjegyzés. Mélyebb számelméleti módszerekkel megmutatható a következő. Ha $m = 2^\alpha \cdot p_1^{\alpha_1} q \cdot p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r} \cdot q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \dots q_s^{\beta_s}$, ahol p_1, p_2, \dots, p_r m -nek a $4k + 1$ alakú prímosztói, q_1, q_2, \dots, q_s pedig a $4k - 1$ alakú prímosztói, és $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ párosak, akkor m felbontható két négyzetszám összegeként, mégpedig $4(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_r + 1)$ -féle módon. Itt akkor is különbözöknek tekintjük a felbontásokat, ha csak sorrendben vagy előjelben térnek el egymástól. Pl. $m = 5^{2n}$ -nek az első megoldásban kapott minden előállítás nyolc előállításnak számít: $(\pm 5^{n-k} a_k)^2 + (\pm 5^{n-k} b_k)^2$ és $(\pm 5^{n-k} b_k)^2 + (\pm 5^{n-k} a_k)^2$. Ezenkívül $m = 5^{2n}$ -nek van még négy triviális előállítása: $5^{2n} = (\pm 5^n)^2 + 0^2 = 0^2 + (\pm 5^n)^2$. Így 5^{2n} -nek $8n + 4$ előállítását találtuk meg. A fenti tétel szerint $m = 5^{2n}$ $4(2n + 1)$ -féleképpen állítható elő, tehát ebben az esetben az összes előállítást megtaláltuk. Az II. és III. megoldásban viszont ez korántsem teljesül.