Megmutatjuk, hogy bármely valós x, y számpárra

$$2^{-\cos^2 x} + 2^{-\sin^2 x} \geqq \sqrt{2} \tag{1}$$

és

$$\sqrt{2} \leqq \sin\ y + \cos\ y. \tag{2}$$

E két összefüggésből következik, hogy a feladat egyenlőtlensége minden valós x, y számpárra fennáll.

Mivel $2^{-\cos^2 x} > 0$ és $2^{-\sin^2 x} > 0$, ezért a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség szerint

$$\frac{2^{-\cos^2 x} + 2^{-\sin^2 x}}{2} \geqq \sqrt{2^{-\cos^2 x} \cdot 2^{-\sin^2 x}} = \sqrt{2^{-(\cos^2 + \sin^2 x)}} = \sqrt{2^{-1}} = \sqrt{\frac{1}{2}},$$

ahonnan kettővel szorozva (1) adódik,

A második egyenlőtlenség a számtani és négyzetes közép közti összefüggésből kapható meg:

$$\frac{1}{2}(\sin y + \cos y) \leqq \sqrt{\frac{\sin^2 y + \cos^2 y}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Szabó Tibor (Nyíregyháza, Krúdy Gy. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzések. 1. A második egyenlőtlenségre több más bizonyítás is ismert. Így pl. $(\sin y + \cos y)^2 = 1 + 2\sin y \cos y = 1 + \sin 2y \leqq 2$, ahonnan $|\sin y + \cos y| \leqq \sqrt{2}$. De bizonyítható geometriai úton is: tekintsünk egy egységnyi átfogójú derékszögű háromszöget, amelynek egyik szöge olyan α hegyesszög, amelyre $|\sin y| = \sin\alpha$ és $|\cos y| = \cos\alpha$. (Ilyen α szög csak akkor nincs, ha $y = \dfrac{k\pi}{2}$ valamely k egészre, de akkor $\sin y + \cos y = 1$ vagy -1.) Ebben a háromszögben a befogók összege éppen $\sin\alpha + \cos\alpha = |\sin y| + |\cos y|$. Ismeretes, hogy adott átfogójú derékszögű háromszögben a befogók összege akkor maximális, ha a háromszög egyenlő szárú. Az egységnyi átfogójú egyenlő szárú derékszögű háromszög befogóinak összege éppen $\sqrt{2}$. Így azt kapjuk, hogy

$$\sin y + \cos y \leqq |\sin y| + |\cos y| \leqq \sqrt{2}.$$

Megjegyezzük még, hogy az említett geometriai egyenlőtlenség könnyen bizonyítható a kerületi szögek tételének segítségével.

2. A feladat egyenlőtlenségében pontosan akkor áll egyenlőség, ha $y = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$, $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{l}{2}\pi$, ahol k és l egészek.