A két egyenlet a következő alakra hozható:

(1) $$a^2+\frac{(b-4)^2}{4}=1, \quad \text{illetve}$$

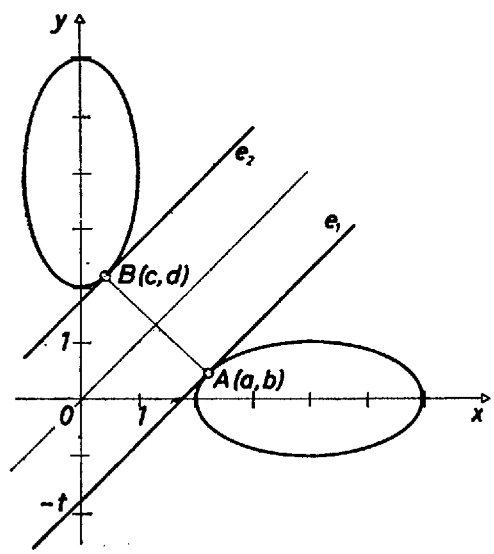
(2) $$\frac{(c-4)^2}{4}+d^2=1.$$

Az (1) egyenlet a $(0;4)$ középpontú és 1 egység, illetve 2 egység féltengelyekkel rendelkező ellipszis egyenletének tekinthető, míg (2) a $(4;0)$ középpontú és 2 egység, illetve 1 egység féltengelyekkel rendelkező ellipszis egyenlete. Ezért a feladat kérdése azt jelenti, hogy az

(3) $$x^2+\frac{(y-4)^2}{4}=1 \quad \text{és az}$$

(4) $$\frac{(x-4)^2}{4}+y^2=1.$$

egyenletű ellipszisek $A(a;b)$ illetve $B(c;d)$ pontjai közötti minimális távolság négyzetét kell meghatározni, ahol A a (3), B pedig a (4) ellipszis egy pontja.



A két ellipszis szimmetrikus az $y=x$ egyenletű egyenesre, ezért a pontjaik közötti minimális távolság a szimmetriatengellyel párhuzamos érintők közül a két közelebbinek a távolsága lesz. Ezek az érintők az ábra e_1, illetve e_2 egyenesei, amelyeknek egyenlete $y=x-t$ alakú. Ha az $y=x-t$ egyenes érintő, akkor ebből az egyenletből és pl. a (4)-ből alkotott egyenletrendszernek pontosan egy megoldása lesz, tehát az

$$\frac{(x-4)^2}{4}+(x-t)^2=1$$

egyenlet diszkriminánsa zérus. Ez az egyenlet:

$$5x^2-8(t+1)x+(4t^2+12)=0,$$

ennek diszkriminánsa nulla:

$$64(t+1)^2-4\cdot 5(4t^2+12)=0,$$
$$t^2-8t+11=0,$$
$$t=4\pm\sqrt{5}.$$

A szimmetriatengelyhez közelebbi érintőhöz tartozó t érték nyilván $t=4-\sqrt{5}$.

Mivel a szimmetriatengely és az e_2 érintő az abszcissza-tengellyel 45°-os szöget zár be, ezért e két egyenes távolsága

$$\frac{4-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}, \ (\approx 1{,}247), \quad \text{így } (a-c)^2+(b-d)^2 \text{ minimuma:}$$

$$\left(\frac{2(4-\sqrt{5})}{\sqrt{2}}\right)^2=42-16\sqrt{5}=2{,}495^2.$$

Benkő Dávid (Budapest, Móricz Zs. Gimn., IV. o. t.)
dolgozata alapján