Először megmutatjuk, hogy n osztható nyolccal. Ismeretes, hogy egy páratlan négyzetszám nyolccal osztva 1-et ad maradékul. Miután $2n+1$ a feltétel szerint négyzetszám és nyilván páratlan, ezért $2n$ osztható nyolccal, tehát n páros. Ebből viszont következik, hogy $3n+1$ is páratlan. A feltétel szerint négyzetszám is, így nyolccal osztva 1 maradékot ad. Tehát $3n$ osztható nyolccal, így n is osztható nyolccal.

Most megmutatjuk, hogy n osztható öttel is. Ha n öttel osztva 1 maradékot ad, akkor $2n+1$, ha n öttel osztva 4 maradékot ad, akkor pedig $3n+1$ ad öttel osztva 3 maradékot, tehát 3-ra, vagy 8-ra végződik, s így nem lehet négyzetszám. Hasonlóan, ha n öttel osztva 2 vagy 3 maradékot ad, akkor $3n+1$, ill. $2n=1$ utolsó jegye vagy 7 vagy 2. Tehát $2n+1$ és $3n+1$ csak úgy lehet egyszerre négyzetszám, ha n osztható öttel is.

Beláttuk, hogy n osztható öttel és nyolccal, így osztható negyvennel is.

Most rátérünk a feladat második részére. Tekintsük a következő (A_i) és (B_i) sorozatot: $A_0 = B_0 = 1$, $A_{i+1} = 5A_i + 4B_i$, $B_{i+1} = 6A_i + 5B_i$; $i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$. Azt állítjuk, hogy

(a) A_i páratlan,

(b) $\frac{1}{3}(B_i^2 - 1) = \frac{1}{2}(A_i^2 - 1)$,

(c) $n_i = \frac{1}{2}(A_i^2 - 1)$ szigorúan monoton nő.

A (c) állítás világos, hiszen A_i és B_i pozitív, ezért

$$A_{i+1} = 5A_i + 4B_i > 5A_i > A_i, \text{ s így } \frac{1}{2}(A_{i+1}^2 - 1) > \frac{1}{2}(A_i^2 - 1).$$

Az (a) állítás is teljesül, hiszen A_0 páratlan, és $A_{i+1} - A_i = 4(A_i + B_i)$, tehát ha A_i páratlan, akkor A_{i+1} is az. Ebből következik, hogy minden A_i páratlan.

Most belátjuk (b)-t is. Hattal szorozva és rendezve az igazolandó összefüggés a következő:

$$3A_i^2 - 2B_i^2 = 1. \tag{1}$$

Ezt teljes indukcióval bizonyítjuk. $i = 0$-ra $A_0^2 = B_0^2 = 1$, tehát (1) igaz. Tegyük fel; hogy $i = k$-ra teljesül, belátjuk, hogy akkor teljesül $i = k+1$-re is

$$\begin{gathered}3A_{k+1}^2 - 2B_{k+1}^2 = 3(5A_k + 4B_k)^2 - 2(6A_k + 5B_k)^2 = (75-72)A_k^2 + \\ +(48-50)B_k^2 + 120A_kB_k - 120A_kB_k = 3A_k^2 - 2B_k^2 = 1.\end{gathered}$$

Ezzel (b)-t is bebizonyítottuk.

Az $n_i = \frac{1}{2}(A_i^2 - 1)$ számok (a) szerint egészek, (c) szerint pedig (minden i-re) különbözők, végül (b) szerint $2n_i + 1 = A_i^2$ és $3n_i + 1 = B_i^2$.