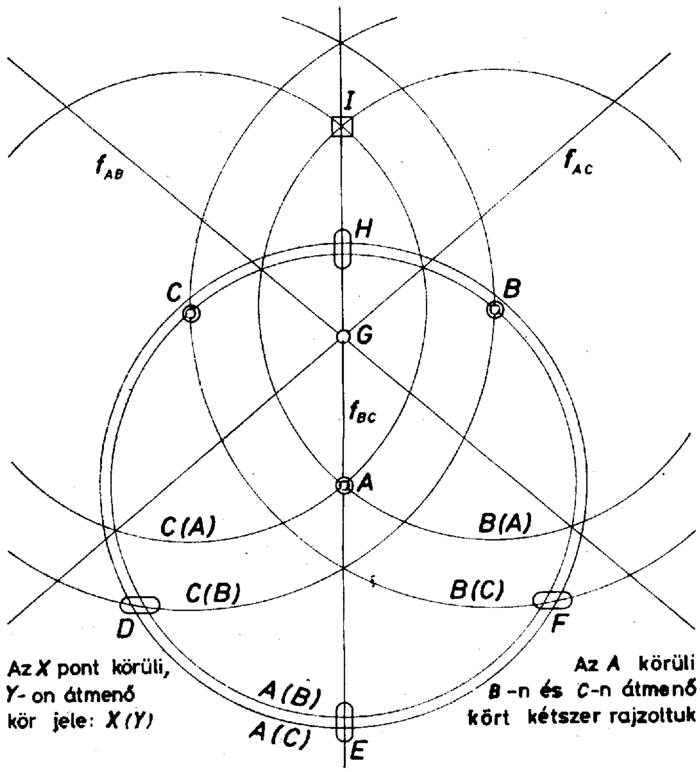
A feladat állítását indirekt módon bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy a hét pont közül bármelyik három egyenlő szárú háromszöget alkot. Legyen közülük kettő A és B. A további öt pont mindegyike nem lehet AB felezőmerőlegesén, mert akkor ezek közül három nem alkotna (egyenlő szárú) háromszöget. Ezért van olyan C pont, amely A-val és B-vel úgy alkot egyenlő szárú háromszöget, hogy pl. $AB = AC$. Tekintsünk egy ilyen ABC háromszöget, és vizsgáljuk meg, hol helyezkedhet el a további négy pont. Ha egy további X pont helyzetét az A és B pontokhoz viszonyítva nézzük, megállapíthatjuk, hogy X rajta van az A középpontú, AB sugarú, vagy a B középpontú AB sugarú körön, vagy AB felezőmerőlegesén, hiszen az ABX háromszög egyenlő szárú. Jelöljük e két kör és a felezőmerőleges pontjainak a halmazát $H(A;\ B)$-vel. Hasonlóan értelmezzük a $H(A;\ C)$ és a $H(B;\ C)$ halmazokat. Feltevésünk szerint a további négy pont mindegyike az A, B, C pontok közül bármelyik kettővel egyenlő szárú háromszöget alkot. Ezért mind a négy pont eleme lesz a $H(A;\ B)$, $H(A;\ C)$ és $H(B;\ C)$ halmazok közös részének.



1. ábra

Az ábrán megrajzoltuk a szóban forgó halmazokat, és a D, E, F, G, H, I pontokból álló metszetüket. Mivel ezek közül E, G, H, I és A egy egyenesen van, akárhogyan választunk ki A, B, C mellé további négy pontot a lehetségesek közül, a kapott hét pont között mindig lesz legalább három, amely egy egyenesre esik, és ezért nem alkot (egyenlő szárú) háromszöget. Ez ellentmond indirekt feltevésünknek. Így a feladat állítása igaz.

Antos András (Budapest, Árpád Gimn., III. o. t.)
dolgozata alapján

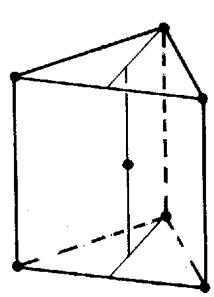
Megjegyzések. 1. A fenti módszerrel – igaz, némi többletmunka árán – beláthatjuk, hogy ha a sík hat pontja közül bármelyik három egyenlő szárú háromszöget határoz meg, akkor ezek egy szabályos ötszög csúcsai és középpontja.

2. Ennek az állításnak a közölt módszertől eltérő bizonyítása megtalálható *Skljarszkij–Csencov–Jaglom:* Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből (Geometria I.) c. könyvének 90 – 94. oldalán

3. Erdős professzor úr a feladatot az American Math. Monthly c. folyóiratban közölte évekkel ezelőtt.

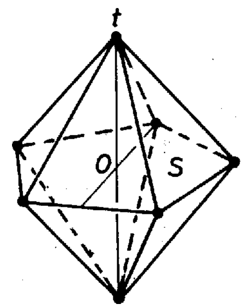
4. A térben viszont kijelölhető 7 olyan pont, amely kielégíti a feltételeket. A teljesség igénye nélkül mutatunk példákat.

a) Egy háromoldalú, egyenlő élű hasáb 6 csúcsa és a köréje írt gömb középpontja (2. ábra).



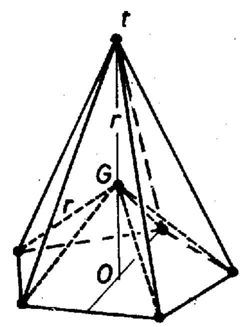
2. ábra

b) Egy szabályos síkötszög csúcsai, hozzájuk véve az O középpontjában az S síkjára állított t tengelyének két, az S-re tükrös pontját (ötoldalú szabályos bipiramis) (3. ábra).



3. ábra

c) Az előbbi ötszöghöz t egy G pontját vesszük hozzá (lehet maga O is) továbbá az ötszög csúcsain átmenő, G körüli gömbnek t-vel való metszéspontjai közül az egyiket (4. ábra).



4. ábra

Továbbiakat úgy lehetne keresni, hogy a fenti körök helyett gömböket veszünk és felező merőleges síkokat.

A fenti együttesekből egy pontot (pl. ötszögcsúcsot) elhagyva 6 pontos együtteseket kapunk. Elmondunk egy olyat is, amely nem kapható meg elhagyással vagy ötszög helyett négyzetet véve.

Egy $60°$-os szögű $ABCD$ rombusz és a rövidebb CD átlójának végpontjaiban a síkjára emelt merőlegeseknek azok az E, F pontjai, amelyekre $CE = DF = CD$ (vagyis $CDFE$ négyzet).

A példákat a Gy. 596. megoldói gyűjtötték, a megoldás és megjegyzései 1960.okt.–nov. számainkban jelentek meg.