Ismeretes, hogy egy háromszög bármelyik oldalára $a = 2r \cdot \sin\alpha$, ahol r a körülírt kör sugara. Ezt felhasználva, majd $2r$-rel osztva:

$$\sin\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha + \sin\beta \cdot \operatorname{tg}\beta = (\sin\alpha + \sin\beta)\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2},$$

amiből

$$\sin\alpha\left(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \sin\beta\left(\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 0.$$

A $\operatorname{tg}x - \operatorname{tg}y = \dfrac{\sin(x-y)}{\cos x \cdot \cos y}$ összefüggést mindkét tagban alkalmazva:

$$\sin\alpha \cdot \frac{\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\alpha \cdot \cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}} - \sin\beta\frac{\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\beta\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}} = 0.$$

Szorozzuk meg mindkét oldalt $\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$-vel, ekkor

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2} - \frac{\sin\beta}{\cos\beta} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 0,$$

majd szorzattá alakítva és a $\operatorname{tg}x$ definícióját alkalmazva:

$$\sin\frac{\alpha-\beta}{2}(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta) = 0.$$

Ez pontosan akkor teljesül, ha

$$\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 0, \quad \text{vagy} \quad \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = 0.$$

Mivel α és β egy háromszög szögei, mindkét feltétel azt jelenti, hogy

$$\alpha = \beta.$$

Utólag megállapíthatjuk, hogy az eredeti feltételt átalakítva azzal mindig ekvivalens egyenleteket kaptunk. Ugyanis, ha $\operatorname{tg}\alpha$ és $\operatorname{tg}\beta$ értelmezve van, akkor $\cos\alpha \neq 0$, $\cos\beta \neq 0$, és viszont. $\left(\text{A } \operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right.$ értelmezettsége, azaz $\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2} \neq 0$ egy háromszögben nyilvánvaló, hiszen $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ nem lehet $\left.90^\circ.\right)$ Ezért az eredeti feltétel nemcsak elegendő, hanem szükséges és elegendő feltétele annak, hogy a háromszög egyenlő szárú legyen.

Mohai Zsuzsa (Dombóvár, Gőgös I. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzés: Több beküldő nem vizsgálta meg, hogy az eredeti egyenletben szereplő függvények mikor vannak értelmezve, illetve olyan átalakításokat is végzett, amelyek az eredetivel nem ekvivalens egyenlethez is vezethetnének. Ilyen pl. a $\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}$-vel való osztás, amely gyökvesztéshez is vezethetne, mert megkívánja az $\alpha \neq \beta$ kikötést. Éppen ezért helyesebb, ha az $f \cdot g = f \cdot h$ alakú egyenleteket $f(g-h) = 0$ alakban írjuk, mert így a két formula mindig ekvivalens.