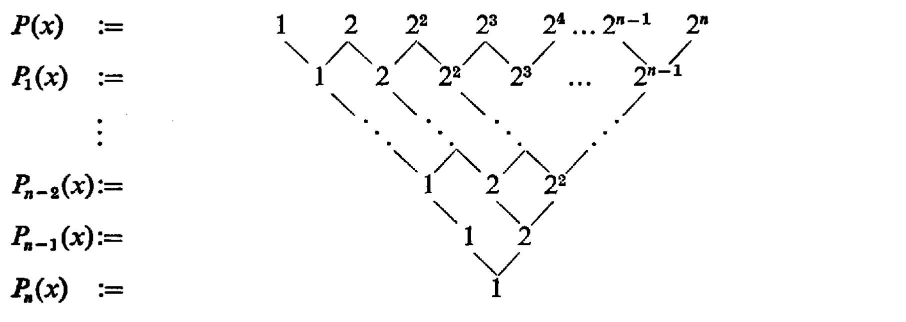
I. megoldás. Jelöljük $P(x)$ elsőrendű különbség-polinomját, a $P(x+1)-P(x)$ polinomot $P_1(x)$-szel (ez nyilván $(n-1)$-edfokú), a másodrendű különbség-polinomja legyen $P_2(x)=P_1(x+1)-P_1(x)$ (ennek a polinomnak $n-2$ a foka), és általában hasonlóan definiáljuk a k-adrendű különbség-polinomot: $P_k(x)=P_{k-1}(x+1)-P_{k-1}(x)$. A k-ra vonatkozó indukcióval könnyen látható, hogy $P_k(x)$ foka $n-k$, így a $P_n(x)$ polinom már konstans. Ezt a konstanst (és a különbség-polinomok közbülső értékeit) adatainkból ismételt kivonással határozhatjuk meg:



$P_n(x)$ tehát az azonosan 1 polinom. Ebből $P(n+2)$ értékét a következőképpen kaphatjuk meg:

$$\begin{aligned}P(n+2)&=P(n+1)+P_1(n+1)=P(n+1)+P_1(n)+P_2(n)\\&=P(n+1)+P_1(n)+P_2(n-1)+P_3(n-1)=\dots\\&=P(n+1)+P_1(n)+P_2(n-1)+P_3(n-2)+\dots+P_{n-1}(2)+P_n(2)=\\&=2^n+2^{n-1}+2^{n-2}+\dots+2^2+2+1=\\&=2^{n+1}-1\end{aligned}$$

(előbbi táblázatunkban ez az utolsó „átló” összege).

II. megoldás. Felhasználjuk az ismert

$$\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}=2^{k-1}$$

azonosságot. Értelmezzük a $q_0(x)=1$, ill. $k\geqq 1$-re a

$$q_k(x)=\binom{x-1}{k}=\frac{(x-1)\cdot(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-k)}{k!}$$

k-adfokú polinomokat. Ekkor a

$$q(x)=q_0(x)+q_1(x)+\dots+q_k(x)+\dots+q_n(x)$$

polinom az $x=$ 1, 2, …, $n+1$ helyeken rendre a 2^0, 2^1, 2^2, …, 2^n értékeket veszi fel. Ha ugyanis $x=k$, akkor

$$q_0(k)+q_1(k)+\dots+q_{k-1}(k)=\binom{k-1}{0}+\binom{k-1}{1}+\dots+\binom{k-1}{k-1}=2^{k-1},$$

és $t\geqq k$ esetén $q_1(k)=0$. Így az n-edfokú $q(x)$ polinom az $x=$ 1, 2, …, $n+1$ helyeken éppen azokat az értékeket veszi fel, mint $P(x)$. Ha azonban két n-edfokú polinom $(n+1)$ különböző helyen megegyezik, akkor azonos; tehát $q(x)$ maga a keresett polinom. Ennek pedig az $x=n+2$ helyen felvett értéke:

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n+1}{i}=2^{n+1}-1.$$

Tornyi Lajos (Bp. Fazekas M. Gimn. IV. o. t.)