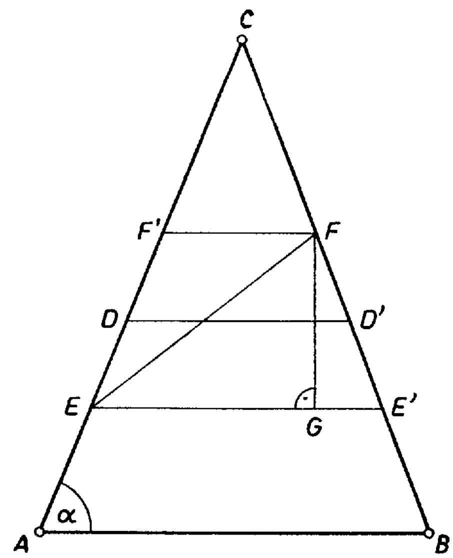
I. megoldás. A feladat feltételei szerint az A-ból B-be vezető, legrövidebb idő alatt megtehető út (nevezzük ezt leggyorsabb útnak) egy E pontja illeszkedik az AC, egy F pontja pedig a CB szakaszra, megengedve, hogy E egybeesik A-val vagy C-vel, illetve F egybeesik C-vel vagy B-vel. Tekintsünk egy ilyen utat. Ha A-ból E-be nem az AE szakaszon jutunk el, a menetidő nyilván növekszik. Hasonlót mondhatunk az út további részeire. Ezért a leggyorsabb út az $AEFB$ törött vonal.



1. ábra

Megmutatjuk, hogy a leggyorsabb útra még az $AE = FB$ feltétel is teljesül. Legyen ugyanis EE' és FF' párhuzamos AB-vel, legyen továbbá EF' felezőpontja D, $E'F$ felezőpontja pedig D'. Húzzunk F-ből merőlegest EE'-re, ennek talppontja legyen G. Az ábra alapján könnyen beláthatjuk, hogy $EGD'D$ paralelogramma, és így $DD' = EG$; világos továbbá, hogy $EF \geq EG$, ezért

(1) $$EF \geq DD'.$$

Az $EE'FF'$ szimmetrikus trapézból még azt is látjuk, hogy

(2) $$ED = FD'.$$

(1)-ből és (2)-ből következik, hogy az $AEFB$ és $ADD'B$ törött vonalaknak betonútra eső szakasza ugyanakkora, a mocsárba eső rész pedig az utóbbinál legfeljebb akkora, mint az előbbinél. Ez azt jelenti, hogy a leggyorsabb útnál $AE = FB$.

Az $AE = FB = x$ és $CAB\sphericalangle = \alpha$ jelöléssel, továbbá $AC = 1$ választással az $AEFB$ út megtételéhez szükséges idő:

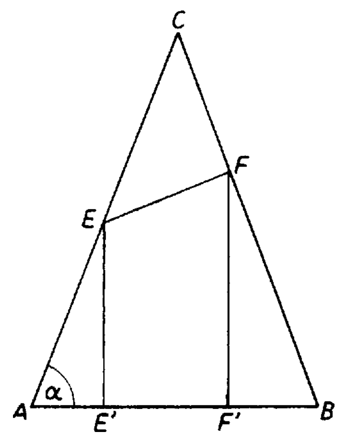
$$t = \frac{2x}{v} + \frac{2(1-x)\cos\alpha}{w}, \quad \text{amelyből}$$
$$t = \frac{2\cos\alpha}{w} + 2x\left(\frac{1}{v} - \frac{\cos\alpha}{w}\right).$$

Innen látjuk, hogy ha $\frac{1}{v} > \frac{\cos\alpha}{w}$ (azaz $w > v \cdot \cos\alpha$), akkor a t idő az $x = 0$-ra minimális, vagyis a leggyorsabb út az AB szakasz.

Ha $w < v \cdot \cos\alpha$, akkor t minimumát $x = 1$ mellett kapjuk, és ebben az esetben a leggyorsabb út az ACB töröttvonal.

A $w = v \cdot \cos\alpha$ esetben minden olyan $AEFB$ út minimális idő alatt tehető meg, amelyre $AE = FB$.

II. megoldás. A 2. ábrán E és F merőleges vetülete AB-n E', illetve F'. Használjuk az ábra további jelöléseit is.



2. ábra

Az $AEFB$ út megtételéhez szükséges idő a következőképpen becsülhető:

$$t = \frac{AE}{v} + \frac{EF}{w} + \frac{FB}{v} = \frac{AE \cdot \cos\alpha}{v \cdot \cos\alpha} + \frac{EF}{w} + \frac{FB\cos\alpha}{v \cdot \cos\alpha} \geq \geq \frac{AE' + F'B}{v \cdot \cos\alpha} + \frac{E'F'}{w} \geq \frac{AB}{\max(w; v \cdot \cos\alpha)}, \tag{3}$$

ahol max $(w; v \cdot \cos\alpha)$ jelenti w és $v \cdot \cos\alpha$ közül a nagyobbat. Ezért t minimumát a következőképpen kaphatjuk:

Ha $w > v \cdot \cos\alpha$, akkor a leggyorsabb út az AB szakasz ($t = \dfrac{AB}{w}$ minimális idő alatt).

Ha $w < v \cdot \cos\alpha$, akkor a leggyorsabb út az ACB töröttvonal ($t = \dfrac{AB}{v \cdot \cos\alpha}$ idő alatt).

Végül, ha $w = v{\cdot}\cos\alpha$, akkor bármely $AEFB$ út minimális idejű, de csak akkor, ha (3)-ban mindenütt az egyenlőség érvényes. Ez azt jelenti, hogy $EF = = E'F'$ is teljesül, tehát $AE = FB$.