A két állítást (F. 2712. és F. 2717. feladat) együtt bizonyítjuk. Legyen

$$S_{n,k}=\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}i^k.$$

Belátjuk, hogy ha $n \geqq 2$, akkor

$$S_{n,0}=-1,\quad S_{n,k}=0,\quad \text{ha}\quad 0<k<n\quad \text{és}\quad S_{n,n}=(-1)^n n! \tag{1}$$

(Ebből $n=100$ helyettesítéssel következik mindkét feladat állítása.)

I. bizonyítás. n-re vonatkozó teljes indukciót alkalmazunk.
$n=2$-re:

$$\begin{aligned}
S_{2,0}&=(-1)^1\binom{2}{1}\cdot 1^0+(-1)^2\binom{2}{2}\cdot 2^0=-2+1=-1,\\
S_{2,1}&=(-1)^1\binom{2}{1}\cdot 1+(-1)^2\binom{2}{2}\cdot 2=-2+2=0,\\
S_{2,2}&=(-1)^1\binom{2}{1}\cdot 1^2+(-1)^2\binom{2}{2}\cdot 2^2=-2+4=2=(-1)^2\cdot 2!
\end{aligned}$$

Legyen ezután $n \geqq 3$, és tegyük fel, hogy n helyett $n-1$-et írva (1) igaz. A binomiális tétel alapján

$$S_{n,0}=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}\cdot i^0=\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}1^{n-i}=(1-1)^n-1=-1.$$

Legyen $k>0$. Ha $1 \leqq i \leqq n$, akkor $\binom{n}{i}=\frac{n}{i}\cdot\binom{n-1}{i-1}$, így

$$S_{n,k}=n\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\binom{n-1}{i-1}\cdot i^{k-1}=-n\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\binom{n-1}{j}\cdot(j+1)^{k-1},$$

ahol $(i-1)$ helyett j-t írtunk. A $j=0$ értékhez tartozó tag a szummában $(-1)^0\binom{m-1}{0}1^{k-1}=1$, ezt leválasztva

$$S_{n,k}=-n\left(1+\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j\binom{n-1}{j}(j+1)^{k-1}\right).$$

Itt a szumma már erősen emlékeztet $S_{n-1,k-1}$-re, csak éppen j^{k-1} helyett $(j+1)^{k-1}$ áll. Ám ha ezt a binomiális tétel szerint kifejtjük, $S_{n-1,t}$ alakú tagok összegéhez jutunk:

$$\begin{aligned}
S_{n,k}=-n\Bigg(1+\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j\binom{n-1}{j}\bigg(&j^{k-1}+\binom{k-1}{1}j^{k-2}+\\
&+\binom{k-1}{2}j^{k-3}+\ldots+\binom{k-1}{t}j^{k-t-1}+\ldots+\binom{k-1}{k-1}j^0\bigg)\Bigg)=\\
=-n\Bigg(1+\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\binom{n-1}{j}j^{k-1}&+\binom{k-1}{1}\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j\binom{n-1}{j}j^{k-2}+\ldots+\\
&+\binom{k-1}{t}\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j\binom{n-1}{j}j^{k-t-1}+\ldots\Bigg)=\\
=-n\Bigg(1+S_{n-1,k-1}&+\binom{k-1}{1}S_{n-1,k-2}+\binom{k-1}{2}S_{n-1,k-3}+\ldots+\\
&+\binom{k-1}{t}S_{n-1,k-1-t}+\ldots+S_{n-1,0}\Bigg).
\end{aligned}$$

Ha $k<n$, akkor $k-1<n-1$, $k-2<n-1$ stb., így a zárójelben az indukciós feltevés szerint az utolsó kivételével mindegyik S nulla, az utolsó -1, tehát a zárójeles összeg értéke nulla. Ezért $S_{n,k}=0$, ha $1 \leqq k<n$.

Ha $k=n$, akkor csak annyi a különbség, hogy az első S értéke indukciós feltevésünk értelmében $(-1)^{n-1}(n-1)!$, a többi tag az utolsó kivételével most is nulla, az utolsó -1, így a zárójeles összeg értéke ezúttal $(-1)^{n-1}(n-1)!$, ezért $S_{n,n}=-n(-1)^{n-1}(n-1)!=(-1)^n n!$, amit bizonyítani akartunk.

Révész Gabriella (Komárom, Jókai M. Gimn., IV. o. t.)
dolgozata nyomán

II. bizonyítás. Csak $k \geqq 1$-re bizonyítjuk (1)-et. Tekintsük azt a feladatot, hogy hányféleképpen osztható el k db kártya n darab borítékba úgy, hogy mindegyik borítékba kerüljön kártya (a borítékok és kártyák megkülönböztethetők). k db kártyát n borítékba n^k-féleképpen oszthatunk el, de ebből le kell vonnunk azokat az eseteket, amikor legfeljebb $n-1$ borítékba került csak kártya. Az $n-1$ borítékot $\binom{n}{n-1}$-féleképpen választhatjuk ki, s minden választásnál $(n-1)^k$-féleképpen oszthatók el a kártyák, összesen tehát $\binom{n}{n-1}(n-1)^k$ esetet kell levonnunk. Most azonban többször vontuk le azokat az eseteket, amelyekben (legföljebb) $n-2$ borítékba került kártya, így az előzőhöz hasonló megfontolásból hozzá kell adnunk $\binom{n}{n-2}(n-2)^k$ esetet. *A logikai szita*-formula szerint ezt az eljárást folytatva megkapjuk a jó esetek számát, ami

$$n^k-\binom{n}{n-1}(n-1)^k+\binom{n}{n-2}(n-2)^k-\binom{n}{n-3}(n-3)^k+\ldots+$$
$$+(-1)^t\binom{n}{n-t}\ (k-t)^k+\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}0^k.$$

$k \geqq 1$, így $0^k=0$, tehát a keresett szám ($i=n-t$ helyettesítéssel)

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}i^k=(-1)^n\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}i^k=(-1)S_{n,k}.$$

Ha $k<n$, akkor k kártyát akárhogyan teszünk is n borítékba, marad üres boríték; a fenti szám tehát nulla, s így $S_{n,k}=0$.

Ha $k=n$, akkor a jó esetek száma az n elemű permutációk száma, $n!$, tehát $(-1)^n S_{n,n}=n!$, ahonnan $S_{n,n}=(-1)^n n!$, amit bizonyítani kellett.

Mohai Zsuzsanna (Dombóvár, Gőgös I. Gimn., IV. o. t)
dolgozata nyomán

Megjegyzések. 1. A logikai szita-formula és annak bizonyítása megtalálható *Hajós Gy.–Neukomm Gy.–Surányi J.:* Matematikai versenytételek I. rész 124–125. oldalán. Ugyanitt olvasható annak a bizonyítása is, hogy $S_{n,n}=(-1)^n n!$, és a bizonyításból könnyen megkapható a többi (1) alatti állítás is.

2. Mindkét megoldás módszerével igazolhatjuk, hogy $S_{n,n+1}=(-1)^n(n+1)!\frac{n}{2}$, azaz $(n+1)!\frac{n}{2}$ -féleképpen osztható el $n+1$ kártya pontosan n borítékba.

3. Olvasóink bizonyára észrevették, hogy a 2712. feladat az októberi számunkban kitűzött 2704. feladatnak az általánosítása.