$x=\pi$-re a bal oldal értéke $(-1)^n$, ezért n csak páros szám lehet; legyen $n=2k$.

Az $f\colon x\mapsto \sin^{2k}x+\cos^{2k}x$ függvény periodikus, és a periódus hossza $\frac{\pi}{2}$, hiszen

$$\sin^{2k}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos^{2k}x,\qquad \cos^{2k}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin^{2k}x.$$

Az is látható, hogy az f függvény a $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon $\pi/4$-re szimmetrikus, azaz

$$f(\pi/2-x)=\sin^{2k}(\pi/2-x)+\cos^{2k}(\pi/2-x)=\cos^{2k}x+\sin^{2k}x=f(x).$$

Mivel $f(x)$ minimális értékére van szükségünk, elég f-et a $[0,\pi/4]$ intervallumban vizsgálni. Ha x-et ebből az intervallumból választjuk, akkor x felírható $x=\pi/4-y$ alakban, ahol $0\leqq y\leqq\pi/4$. Ezzel

$$\begin{aligned}f(x)&=\left(\sin^2(\pi/4-y)\right)^k+\left(\cos^2(\pi/4-y)\right)^k=\\&=\left(\left(\frac{1}{\sqrt2}(\cos y-\sin y)\right)^2\right)^k+\left(\left(\frac{1}{\sqrt2}(\cos y+\sin y)\right)^2\right)^k=\\&=\frac{1}{2^k}\left((1-\sin 2y)^k+(1+\sin 2y)^k\right).\end{aligned}$$

A k-adik hatványokat a binomiális tétellel kiszámolva, összevonás után a negatív tagok kiesnek, és a nem negatív tagok elhagyásával az összeg nem növekszik:

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{2^k}\left(\left(1-\binom{k}{1}\sin 2y+\binom{k}{2}\sin^2 2y-+\dots\right)+\right.\\&\quad\left.+\left(1+\binom{k}{1}\sin 2y+\binom{k}{2}\sin^2 2y+\dots\right)\right)=\\&=\frac{1}{2^{k-1}}\left(1+\binom{k}{2}\sin^2 2y+\binom{k}{4}\sin^4 2y+\dots\right)\geqq\frac{1}{2^{k-1}}.\end{aligned}\tag{1}$$

Az alsó becslésként kapott $\frac{1}{2^{k-1}}$ éppen $f(\pi/4)$; így azt a legnagyobb k természetes számot kell megtalálnunk, amelyre

$$\frac{1}{2^{k-1}}\geqq\frac{1}{2k}.\tag{2}$$

Könnyen látható, hogy $k\leqq 4$ esetén (2) teljesül, $k=5$-re pedig az egyenlőtlenség már nem áll fenn. Ha pedig egy t (4-nél nagyobb) pozitív egészre $\frac{1}{2^{t-1}}<\frac{1}{2t}$, akkor $\frac{1}{2^{(t+1)-1}}=\frac{1}{2}\frac{1}{2^{t-1}}<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2t}<\frac{1}{2(t+1)}$, azaz $(t+1)$-re sem teljesül az egyenlőtlenség. Így a (2) összefüggést kielégítő legnagyobb természetes szám a 4, feladatunk kérdésére tehát $n=2\cdot 4=8$ a válasz.

Megjegyzés. A megoldásban kulcsszerepet játszó (1) becsléshez más módszerrel is eljuthatunk. Kiszámíthatjuk az f függvény deriváltját, amelyről könnyen igazolhatjuk, hogy a $[0,\pi/4]$-ben nem pozitív. Használhatjuk továbbá a k-adik hatványközépre és a számtani középre vonatkozó egyenlőtlenséget is, amely szerint

$$\sqrt[k]{\frac{(\sin^2 x)^k+(\cos^2 x)^k}{2}}\geqq\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{2}=\frac{1}{2}.$$