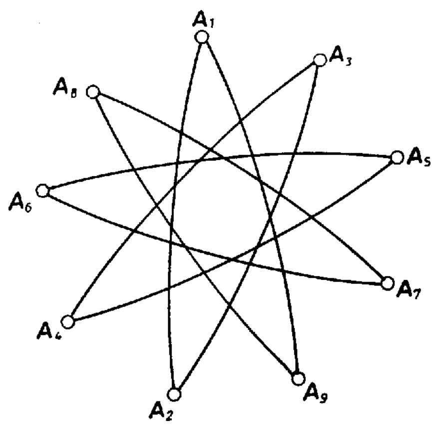
I. megoldás. Ha a szabályos sokszög oldalainak száma páros, akkor az átmérője két szemközti csúcs távolsága. Vágjuk el ezt a sokszöget két részre egy oldalának felező merőlegesével. Ekkor mindkét rész átmérője a kiszemelt oldal felezőpontját a szemközti oldal egyik végpontjával összekötő szakasz hossza lesz, ami nyilván kisebb, mint a szabályos sokszög átmérője.

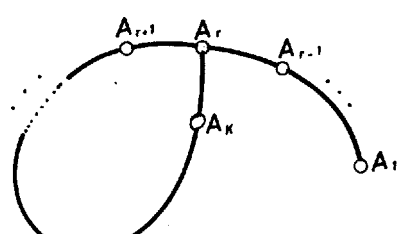
Legyen ezután a szabályos sokszög oldalainak száma $2n+1$. Akárhogyan osztjuk két sokszögre ezt az alakzatot, (nem feltétlenül egy egyenessel vágva el), az egyik részben legalább $n+1$ egymás utáni csúcs lesz. Ennek a résznek az átmérője megegyezik az eredeti sokszög átmérőjével. Tehát a feltételnek a páratlan oldalú sokszögek felelnek meg.

II. megoldás. Gráfok segítségével megmutatjuk, hogy egy páratlan oldalszámú szabályos sokszög csúcsait két osztályba sorolva, valamelyik osztályban biztosan található két olyan csúcs, amelyeknek a távolsága a sokszög átmérője. Jelölje G azt a gráfot, amelynek szögpontjai a sokszög csúcsai, és két szögpontját akkor köti össze él, ha azok távolsága egyenlő a sokszög átmérőjével. Így minden pont éppen két másikkal lesz összekötve. Legyen A_1 az egyik csúcs, ebből induljon egy él A_2-be. Az A_2 szögpont A_1-en kívül még egy csúccsal össze van kötve, jelölje azt A_3. Az A_3-ból A_2-n kívül még megy él A_4-be, A_4-ből A_5-be, és így tovább. Ebben az A_1, A_2, A_3, $\ldots$ sorozatban előbb-utóbb el kell jutnunk egy olyan A_k-hoz, amelyre az A_1, A_2, $\ldots, A_k$ pontok még mind különbözők, de A_{k+1} már megegyezik ezek valamelyikével, A_r-rel. Ebben az esetben A_r csak A_1 lehet, hiszen másképpen A_r legalább 3 ponttal (A_{r-1}, A_{r+1}, A_k) lenne összekötve. $A_1A_2\ldots A_k$ tehát egy kör, így benne minden pontból két él fut ki.



1. ábra

Az itt fel nem sorolt csúcsokra folytatva az eljárást, végül G minden pontja belekerül egy-egy körbe. Két különböző körnek nem lehet közös pontja, mert abból legalább 3 él indulna ki. A G gráfnak tehát annyi pontja van, amennyi e körök hosszának az összege. Így lennie kell páratlan hosszú körnek is, ezért G nem páros gráf.



2. ábra