I. megoldás. Ellenőrizhető, hogy $f(3)=3$; ha tehát $x_0=3$, akkor az $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ sorozat minden eleme 3. Ha találunk olyan $a_0, a_1, \ldots, a_m, \ldots$ végtelen sorozatot, amelynek a kezdő eleme $a_0=3$, és $m \geqq 1$-re $f(a_m)=a_{m-1}$, akkor $x=a_m$ választással $x_1=f(x_0)=f(a_m)=a_{m-1}$, ugyanígy $x_2=a_{m-2}$, $x_3=a_{m-3}$, $\ldots$, $x_m=a_0=3$, s utána már $3=x_{m+1}=x_{m+2}=\ldots$, tehát az $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ sorozatnak csak véges sok (legfeljebb $m+1$) különböző eleme van. Ha még azt is biztosítani tudjuk, hogy minden a_m különböző legyen, akkor találtunk a feladat követelményének megfelelően végtelen sok x_0 értéket. Az $f(a_m)=a_{m-1}$ azt jelenti, hogy a_m az $x^2-4x+a_{m-1}=0$ egyenlet egyik gyöke, tehát $a_m=2+\sqrt{4-a_{m-1}}$, vagy $a_m=2-\sqrt{4-a_{m-1}}$. Az utóbbi esetben $a_m<2$, tehát a_{m+1} is valós lesz. Tekintsük tehát a következő sorozatot:

$$a_0=3, \quad a_m=2-\sqrt{4-a_{m-1}}, \quad \text{ha} \quad m \geqq 1 \quad (a_1=1, a_2=2-\sqrt{3}, \ldots).$$

Ennek a sorozatnak minden eleme valós, mert $m \geqq 1$ esetén $a_m<2$. Másrészt $a_0>a_1$, és $a_{m-2}>a_{m-1}$-ből következik, hogy $a_{m-1}=2-\sqrt{4-a_{m-2}}>2-\sqrt{4-a_{m-1}}=a_m$, tehát a sorozat szigorúan monoton csökken. (Felhasználtuk, hogy ahol az $x \mapsto 2-\sqrt{4-x}$ függvény értelmes – $x \leqq 4$-re –, ott szigorúan monoton nő.) Az $a_0, a_1, \ldots, a_m, \ldots$ sorozat elemei tehát különbözőek.

Találtunk a feltételeknek eleget tevő sorozatot, ezzel a feladat állítását igazoltuk.

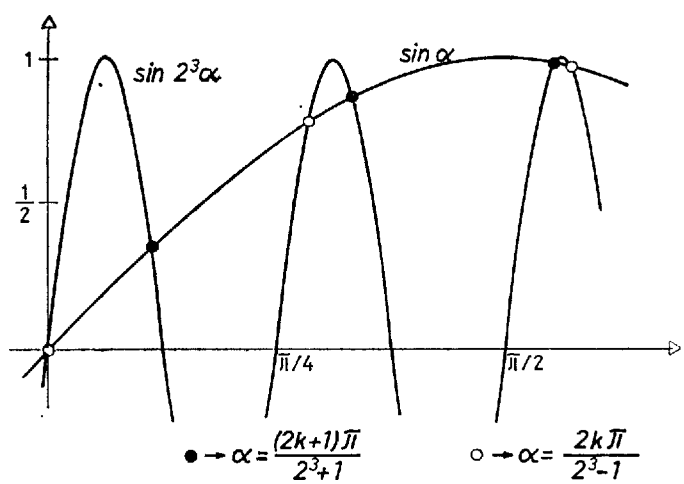
Nagy Gábor Péter (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., III. o. t.)
dolgozata alapján

II. megoldás. Vegyük észre, hogy ha x helyébe $4\sin^2\alpha$-t írunk, akkor

$$f(x)=f(4\sin^2\alpha)=16\sin^2\alpha-16\sin^4\alpha=16\sin^2\alpha\cos^2\alpha=$$
$$4(2\sin\alpha\cos\alpha)^2=4\sin^2 2\alpha.$$

Minden $0 \leqq x_0 \leqq 4$-hez van olyan 0 és $\frac{\pi}{2}$ közötti α, amelyre $x_0=4\sin^2\alpha$, s erre az α-ra

$$x_0=4\sin^2\alpha, \quad x_1=4\sin^2 2\alpha, \quad x_2=4\sin^2 4\alpha, \ldots, x_n=4\sin^2 2^n\alpha, \ldots.$$



$\sin 2^n\alpha$ *minden hullámán* 2 *metszéspont van, mert*
$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$-*re* $\sin\alpha$ *monoton és folytonos,* $\sin 2^n\alpha$
folytonos, és minden értéket felvesznek 0 *és* 1 *között*

A $\sin\alpha$ függvény 0 és $\frac{\pi}{2}$ között szigorúan monoton nő, a $\sin 2^n\alpha$ függvény pedig 0 és $\frac{\pi}{2}$ között 2^{n-2} hullámot ír le (ha α 0 és $\frac{\pi}{2}$ között változik, akkor $2^n\alpha$ 0 és $2^{n-2}(2\pi)$ között mozog, tehát $(2n-2)$-szer „fordul körbe”), így a $\sin 2^n\alpha$ függvény görbéje 0 és $\frac{\pi}{2}$ között legalább $2\cdot 2^{n-2}=2^{n-1}$-szer metszi a $\sin\alpha$ függvény görbéjét (l. az ábrát). A $\sin\alpha=\sin 2^n\alpha$ egyenletnek tehát legalább 2^{n-1} megoldása van 0 és $\frac{\pi}{2}$ között, így legalább ennyi megoldása van a $4\sin^2\alpha=4\sin^2 2^n\alpha$ egyenletnek, tehát az $x_0=x_n$ egyenletnek is. (Különböző α-hoz különböző $\sin\alpha$, ill. $4\sin^2\alpha$ tartozik, hiszen $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.) Minden ilyen x_0 megoldásra

$$x_{n+1}=f(x_n)=f(x_0)=x_1, \quad x_{n+2}=f(x_{n+1})=f(x_1)=x_2, \ldots \text{ stb.},$$

vagyis az x_0, x_1, ..., x_n, ... sorozat periodikus, s ezért csak véges sok különböző eleme van.

Minden n-re találtunk tehát legalább 2^{n-1} különböző (megfelelő) x_0 értéket, s miután n növelésével 2^{n-1} minden határon túl nő, a feladat állítását beláttuk.