A binomiális tétel szerint

$$(5k \pm 1)^5 = (5k)^5 \pm 5 \cdot (5k)^4 + \binom{5}{2}(5k)^3 \pm \binom{5}{3}(5k)^2 + 5 \cdot 5k \pm 1 \quad \text{és}$$

$$(5k \pm 2)^5 = (5k)^5 \pm (5k)^4 \cdot 2 + \binom{5}{2}(5k)^3 2^2 \pm \binom{5}{3}(5k)^2 2^3 + 5 \cdot 5k \cdot 2^4 \pm 2^5;$$

tehát egy 5-tel nem osztható szám ötödik hatványa 25-tel osztva $1,\ 7,\ -1$ vagy -7 maradékot ad aszerint, hogy maga a szám 5-tel osztva $1,\ 2,\ -1$ vagy -2 maradékot ad. (A fenti kifejezések jobb oldalán álló tagok ugyanis az utolsó kivételével 25-tel oszthatóak, és $1,\ -1,\ 2^5,\ -2^5$ maradéka pedig rendre $1,\ -1,\ 7,\ -7$.)

Tekintsünk ezután öt egész számot, amelyek ötödik hatványának összege osztható 25-tel, és helyettesítsük mindegyik ötödik hatványt a (25-tel való osztáskor keletkező) maradékával. Ha az öt szám egyike sem osztható 5-tel, akkor a maradékok $1,\ -1,\ 7$ vagy -7 lehetnek, és az összegük osztható 25-tel. Az összeg nem lehet több $5 \cdot 7 = 35$-nél, így csak $-25,\ 0$ vagy 25 lehet. De nulla nem lehet az összeg, hiszen öt páratlan szám összege páratlan. Nem lehet az összeg 25 sem, mert ekkor legalább négy 7-esre lenne szükség (kevesebb 7-es esetén a maximálisan elérhető összeg $3 \cdot 7 + 2 \cdot 1 = 23 < 25$). Ekkor viszont négy 7-es mellett ötödiknek -3 kellene, ami lehetetlen. Ugyanígy látható be, hogy -25 sem lehet az összeg. Ellentmondásra jutottunk tehát abból a feltevésből, hogy az öt szám egyike sem osztható 5-tel, így a feladat állítása igaz.

Oláh Gábor (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzések: 1. Hasonlóan látható be az is, hogy öt szám ötödik hatványának az összege csak úgy lehet 25-tel osztható, ha egyikük osztható 5-tel, a másik négy pedig két olyan párt alkot, amelyeken belül a két-két tag összege 5-tel osztható.

2. Általánosan is felvethető, hogy igaz-e a következő állítás: Ha p prímszám, és p darab egész szám p-edik hatványának összege osztható p^2-tel, akkor valamelyik szám osztható p-vel.

$p = 2$-re az állítás igaz, hiszen páratlan szám négyzete 4-gyel osztva 1-et ad maradékul. $p = 3$-ra is könnyen igazolható a megfelelő állítás a közölt megoldás gondolatmenetével, $p = 5$-re pedig éppen a feladat állítását kapjuk. Ha azonban $p \geq 7$, akkor mindig van ellenpélda. A $p = 7$ esetben

$$3^7 + (-2)^7 + (-1)^7 + 1^7 + 1^7 + (-1)^7 + (-1)^7 = 7^3 \cdot 6,$$

$p \geq 11$ esetében pedig

$$4^p + (-2)^p + (-2)^p + (-2)^p + (-2)^p + 1^p + 1^p + 1^p + 1^p = 4^p - 4 \cdot 2^p + 4 = (2^p - 2)^2$$

osztható p^2-tel, mivel Fermat „kis” tétele szerint $2^p - 2$ osztható p-vel. E kilenc számhoz $\dfrac{p-9}{2}$ darab 1-est és $\dfrac{p-9}{2}$ darab (-1)-est hozzávéve megkapjuk a kívánt ellenpéldát.