Mérjünk fel a DA félegyenesre D-ből kiindulva egy olyan szakaszt; amelynek a hossza $DB \cdot DC$; legyen ennek a szakasznak a másik végpontja P. Hasonlóan kapjuk a DQ, ill. DR szakaszokat, amelyek hossza $DA \cdot DC$, ill. $DA \cdot DB$.

Az ABD háromszög hasonló a QPD háromszöghöz, hiszen megegyezik két oldalpárjuk aránya és a közbezárt szög. Ezért

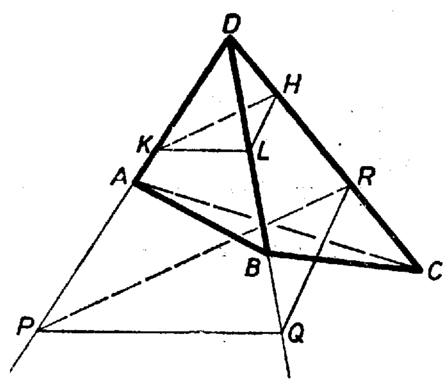
$$\frac{QP}{AB} = \frac{DP}{DB}, \quad \text{azaz} \quad \frac{QP}{AB} = \frac{DB \cdot DC}{DB},$$

így

$$QP = AB \cdot DC.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy $RQ = BC \cdot DA$ és $PR = CA \cdot DB$.

Könnyen láthatjuk, hogy a PQR háromszög valóban létezik, hiszen csúcsai rendre a nem egysíkú DA, DB, DC félegyeneseken lévő, D-től különböző pontok. Tudjuk, hogy az ABC háromszög szabályos, vagyis $AB = BC = CA$. Ha az AB szakasz hossza d, akkor a PQR háromszög oldalai $d \cdot DA$, $d \cdot DB$, $d \cdot DC$. A PQR háromszög d-szeres kicsinyítésével tehát olyan háromszöget kapunk, amelynek oldalai éppen DA, BC, DC nagyságúak.



II. megoldás. Vegyünk fel egy olyan gömböt, amely illeszkedik az A, B, C pontokra, és amelynek a D csúcs külső pontja. (Ilyen gömb biztosan létezik.) Legyen a DA, DB és DC élek másik közös pontja a gömbbel K, L és H. Az A, B, D pontok síkja a gömböt egy körben metszi, tehát az $ABLK$ négyszög húrnégyszög. A húrnégyszögek tétele szerint $DKL\sphericalangle = ABL\sphericalangle$. Emiatt a DAB háromszög hasonló a DLK háromszöghöz, hiszen a D-nél lévő szögük is azonos. Ugyanilyen meggondolás alapján a DBC háromszög hasonló DHL-hez, a DCA háromszög pedig DKH-hoz.

Az első két háromszögpár hasonlóságából

$$\frac{KL}{DL} = \frac{BA}{DA} \quad \text{és} \quad \frac{HL}{DL} = \frac{BC}{DC}.$$

E két egyenlet hányadosa:

$$\frac{KL}{HL} = \frac{BA \cdot DC}{DA \cdot BC} = \frac{DC}{DA}; \tag{1}$$

(közben felhasználtuk, hogy $BA = BC$.) Ugyanígy kapjuk, hogy

$$\frac{HL}{KH} = \frac{DA}{DB}. \tag{2}$$

(1) és (2) azt jelenti, hogy a biztosan létező KLH háromszög hasonló ahhoz a háromszöghöz, amelynek oldalai DA, DB és DC.