Legyen $\dfrac{a}{b}$ és $\dfrac{c}{d}$ a két tört, ahol $a+c=1000=b+d$; feltehetjük, hogy például $b \geq d$. Mivel

$$\left(\frac{1}{b}+\frac{999}{d}\right)-\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)=\frac{999-c}{d}+\frac{1-a}{b}=(999-c)\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{b}\right)\geq 0,$$

valamint

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)-\left(\frac{999}{b}+\frac{1}{d}\right)=\frac{c-1}{d}+\frac{a-999}{b}=(c-1)\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{b}\right)\geq 0,$$

ezért a két tört összege akkor a legnagyobb, ill. a legkisebb, ha valamelyik tört számlálója 1.

Ha $a=1$ és $d=1$, akkor az összeg $\dfrac{1}{999}+999>999$, míg $a=1<d$ esetén: $\dfrac{1}{b}+\dfrac{999}{d}\leq 1+\dfrac{999}{2}<501$.

Az összeg maximális értéke tehát $999+\dfrac{1}{999}$, és ez csak $a=d=1,\ b=c=999$ mellett lép fel.

Az összeg legkisebb értéke megegyezik $f(d)=\dfrac{999}{1000-d}+\dfrac{1}{d}$ minimumával ($d=1,\ 2,\ \ldots,\ 500$). Megmutatjuk, hogy ez éppen $f(31)=\dfrac{999}{969}+\dfrac{1}{31}$, sőt

$$f(500)>f(499)>\ldots>f(32)>f(31),$$

és

$$f(1)>f(2)>\ldots>f(30)>f(31).$$

Képezzük ugyanis f helyettesítési értékeit két szomszédos egész helyen:

$$\begin{aligned}f(d)-f(d-1)&=\left(\frac{999}{1000-d}+\frac{1}{d}\right)-\left(\frac{999}{1001-d}+\frac{1}{d-1}\right)=\\&=\frac{999}{(1000-d)(1001-d)}-\frac{1}{d(d-1)}=\\&=\frac{998d^2+1002d-1\,001\,000}{(1000-d)(1001-d)d(d-1)}.\end{aligned}$$

A kapott hányados „nevezője” pozitív. Mivel a $g(x)=998x^2+1002x-1\,001\,000$ másodfokú függvény egyik gyöke negatív, a másik pedig 31 és 32 között helyezkedik el, ezért az $f(d)-f(d-1)$ különbség $d\geq 32$ esetén pozitív, $d=2,\ 3,\ \ldots,\ 31$-re pedig negatív.

A két tört összegének legkisebb értéke tehát $\dfrac{999}{969}+\dfrac{1}{31}$, és ez csak $c=1,\ d=31$-re lép fel.