Az n-re vonatkozó teljes indukcióval belátjuk, hogy a_n minden n természetes számra egész; $a_0=0,\ a_1=1,\ a_2=4,\ a_3=15$ és $a_4=56$ (ez utóbbi érték a feladat szövegében sajtóhibával jelent meg). Megmutatjuk, hogy ha a_n és a_{n-1} egész, akkor a_{n+1} is egész. Ehhez nyilván azt kell igazolnunk, hogy $\sqrt{3a_n^2+1}$ egész szám, vagyis $3a_n^2+1$ egy egész szám négyzete. Emeljük négyzetre az a_n értékét meghatározó

$$a_n-2a_{n-1}=\sqrt{3a_{n-1}^2+1}$$

összefüggést:

$$a_n^2-4a_{n-1}a_n+4a_{n-1}^2=3a_{n-1}^2+1.$$

Ha mindkét oldalhoz hozzáadunk $3a_n^2-3a_{n-1}^2$-et, akkor a jobb oldalon éppen $3a_n^2+1$, a bal oldalon pedig

$$4a_n^2-4a_{n-1}a_n+a_{n-1}^2=(2a_n-a_{n-1})^2$$

áll, tehát $3a_n^2+1$ valóban négyzetszám.

Megjegyzés. A bizonyításból az is kiderült, hogy $a_{n+1}=2a_n+|2a_n-a_{n-1}|$. Mivel $2a_n=4a_{n-1}+2\sqrt{3a_{n-1}^2+1}>a_{n-1}$, ezért

$$a_{n+1}=4a_n-a_{n-1}.$$

Ha α és β a fenti rekurzió ún. „karakterisztikus egyenletének”, az $x^2=4x-1$ egyenletnek a két gyöke, akkor a $b_n=\alpha^n$ és a $c_n=\beta^n$ sorozatok kielégítik a fenti rekurziót, sőt, tetszőlegesen rögzített p és q számok mellett ilyen tulajdonságú lesz az $a'_n=p\alpha^n+q\beta^n$ sorozat is. Valóban, $\alpha^2=4\alpha-1$ és $\beta^2=4\beta-1$ felhasználásával

$$\begin{aligned}a'_{n+1}&=p\alpha^{n+1}+q\beta^{n+1}=p\alpha^{n-1}\alpha^2+q\beta^{n-1}\beta^2=\\&=p\alpha^{n-1}(4\alpha-1)+q\beta^{n-1}(4\beta-1)=\\&=4(p\alpha^n+q\beta^n)-(p\alpha^{n-1}+q\beta^{n-1})=4a'_n-a'_{n-1}.\end{aligned}$$

Ha p és q értékét $\dfrac{1}{2\sqrt3}$-nak, ill. $-\dfrac{1}{2\sqrt3}$-nak választjuk, akkor ($\alpha=2+\sqrt3$ és $\beta=2-\sqrt3$ szerint) $a'_0=0=a_0,\ a'_1=1\equiv a_1$. Ez azt jelenti, hogy

$$a_n=a'_n=\frac{1}{2\sqrt3}\Big(\big(2+\sqrt3\big)^n-\big(2-\sqrt3\big)^n\Big).$$

A hatványozásokat a binomiális tétel segítségével végezve könnyen látható, hogy a_n egész.