A feladatban szereplő helyett egy általánosabb összeget számítunk ki; megmutatjuk, hogy $n \geq 3$ esetén

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} i^2 (-1)^i = 0.$$

Alakítsuk át az összegzésben álló kifejezést az ismert

$$i\binom{n}{i} = n\binom{n-1}{i-1} \qquad (n \geqq i \geqq 1) \tag{1}$$

összefüggés alapján; ekkor az összeadandókban i „foka” csökken:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} i^2 (-1)^i &= n\sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1} i(-1)^i = \\ &= n\sum_{i-1=0}^{n-1} \binom{n-1}{i-1} (i-1+1)(-1)^{i-1+1} = \\ = -n\sum_{i-1=0}^{n-1} \binom{n-1}{i-1} (i-1)(-1)^{i-1} &- n\sum_{i-1=0}^{n-1} \binom{n-1}{i-1} (-1)^{i-1}.\end{aligned} \tag{2}$$

Itt az utolsó összeg $\big(1+(-1)\big)^{n-1}$-nek a binomiális tétel szerinti kifejtése, ezért az értéke nulla, ha $n \geq 2$. Az első összegnél vezessük be az $i-1=k$ jelölést, alkalmazzuk ismét (1)-et $k \geq 1$-re (a $k=0$ értékhez tartozó tag nulla, így elhagyható). Ekkor

$$\sum_{i-1=0}^{n-1} \binom{n-1}{i-1} (i-1)(-1)^{i-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} k(-1)^k = (n-1)\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-2}{k-1} (-1)^k =$$
$$= -(n-1)\sum_{k-1=0}^{n-2} \binom{n-2}{k-1} (-1)^{k-1} = -(n-1)\big(1+(-1)\big)^{n-2} = 0,$$

ha $n \geq 3$. Ezzel beláttuk, hogy $n \geq 3$ esetén a (2)-ben kapott mindkét összeg nulla, tehát a feladatban szereplő összeg értéke is nulla.

Megjegyzés: Hasonlóan igazolható, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} i^k (-1)^i = 0,$$

ha $n \geq k+1$.