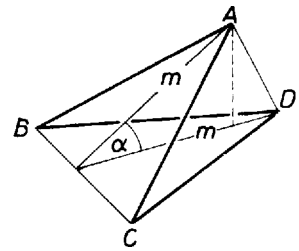
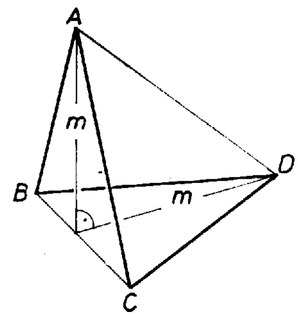
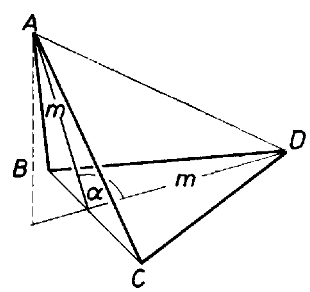
ABC és DCB egybevágó egyenlő szárú háromszögek, hiszen BC alapjuk közös, száraik pedig egységnyi hosszúak. Ezért egyenlő a két háromszög CB oldalhoz tartozó magassága is, jelöljük ezt m-mel, a CB oldalt pedig x-szel. Legyen a tetraéder alaplapja a DBC háromszög, ennek az ABC lappal bezárt szöge pedig α.







A tetraéder térfogata

(1)
$$V = \frac{x \cdot m^2 \cdot \sin\alpha}{6} = \frac{x(1-x^2/4)\sin\alpha}{6},$$

ahol figyelembe vettük, hogy $m^2 = 1 - \dfrac{x^2}{4}$.

Világos, hogy $0 < x < 2$, és itt rögzített x esetén V akkor a legnagyobb, ha $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$. Ezért azt kell még megállapítanunk, hogy

(2)
$$V = \frac{x}{6} - \frac{x^3}{24}$$

milyen x-re maximális.

A számtani és mértani középre vonatkozó egyenlőtlenség szerint

(3)
$$18V^2 = x^2/2(1-x^2/4)(1-x^2/4) \leqq \left(\frac{x^2/2 + 2(1-x^2/4)}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3,$$

így a tetraéder térfogata legfeljebb $\dfrac{2\sqrt{3}}{27}$. Ez a maximum akkor lép fel, ha (3)-ban egyenlőség áll fenn, azaz ha $\dfrac{x^2}{2} = 1 - \dfrac{x^2}{4}$, vagyis $x = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. (A $0 < x < 2$ feltételt ez kielégíti.)

(1)-ből láthatjuk: a tetraéder térfogata minden 0 és $\dfrac{2\sqrt{3}}{27}$ közötti értéket felvehet, hiszen $\sin\alpha$ az α-nak folytonos függvénye. Az $\alpha = 0$ esetben persze a tetraéder elfajult lesz, és ekkor $V = 0$.