A feladatban természetesen az ún.*genovai lottóra* gondoltunk (90 szám közül 5-öt húznak ki); Magyarországon (még a feladat megjelenésekor is) ez a jobban ismert játékforma.

Egy húzás legkisebb száma 1-es, 2-es, …, 86-os lehet. Ezeket a számokat $(2k-1, 2k)$ alakú párokba kapcsoljuk, ahol $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ 43$. Minden ilyen párból a páratlan szám többször fordul elő legkisebb kihúzott számként, mint a páros. A keletkező többlet a $(2k-1, 2k)$ párnál:

$$T_k = \binom{91-2k}{4} - \binom{90-2k}{4} = \binom{90-2k}{3}$$

(felhasználtuk a binomiális együtthatókra jól ismert

$$\binom{n}{t-1} + \binom{n}{t} = \binom{n+1}{t}$$

összefüggést.)

Ennélfogva kérdésünkben a páratlan számok előfordulásának teljes többlete:

$$T = \sum_{k=1}^{43} T_k = \sum_{k=1}^{43} \binom{90-2k}{3}.$$

A fenti T szám ismeretében a páratlan számmal kezdődő eredmények száma

$$T + \frac{1}{2}\left[\binom{90}{5} - T\right] = \frac{1}{2}\left[\binom{90}{5} + T\right],$$

a keresett valószínűség pedig

$$\frac{1}{2}\left[\binom{90}{5}\right] + T\bigg] \Big/ \binom{90}{5} = \frac{1}{2} + \frac{T}{2\binom{90}{5}}.$$

A feladat teljes megoldásához még ki kell számítanunk T értékét.

Az egyszerűbb számolás kedvéért új összegezési indexet vezetünk be; legyen:

$$k = 44 - m, \quad \text{azaz} \quad m = 44 - k.$$

Így fordított sorrendben kapjuk az összeg tagjait:

$$T = \sum_{m=1}^{43} \binom{2m+2}{3}.$$

Kifejtéssel az összeg futó tagja

$$\frac{2}{3}(m+1)(2m+1)m = \frac{4}{3}m^3 + 2m^2 + \frac{2}{3}m,$$

és itt ismert összegképleteket alkalmazva T értékét a következő polinom adja az $r = 43$ helyen:

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}\frac{r^2(r+1)^2}{4} + 2\frac{r(r+1)(2r+1)}{6} + \frac{2}{3}\frac{r(r+1)}{2} &= \\ = \frac{1}{3}r(r+1)\left(r(r+1) + (2r+1) + 1\right) &= \\ = \frac{1}{3}r(r+1)^2(r+2) = (2r+2)\binom{r+2}{3}&. \end{aligned}$$

Tehát annak a valószínűsége, hogy a legkisebb kihúzott szám páratlan,

$$\frac{1}{2} + \frac{44 \cdot \binom{45}{3}}{\binom{90}{5}} \approx 0{,}5142.$$

Megjegyzések. 1. A lottóhúzás *legnagyobb* számában viszont a párosaké az előny – legalábbis elméletileg. Minden húzás-képhez ugyanis fel lehet írni az „aritmetikai tükörképét” a teljes számkészlet centrumára, azaz $(1+90):2 = 45{,}5$-re. Vagyis az E első, M második, …, $Ö$ ötödik szám helyére $(91-E),\ \ldots,\ (91-Ö)$ lép. Így a sorozat csökkenő lesz, és $91-E$ ellentétes paritású az E-vel.

2. Kérdésünk eredete a következő volt: láttunk egy-egy táblázatot az 1957 óta folyó magyar lottójáték-sorozat első 1000 húzásából (azaz 1976 elejéig) a legkisebb, valamint a legnagyobb számok „eloszlásáról”, az előfordult 1–65, ill. 26–90 értékek „gyakoriságáról”. Azokat a páratlan és páros kategóriákban összegezve a legkisebb helyen 523 : 477, a legnagyobb helyen 501 : 499 a páratlanok fölénye. A várt 51,4 % helyett 52,3 %, illetve 49,9 %.

Az 1000 kísérletnek tekinthető „mintavétel" a lehetséges húzás-kimenetelek közel 44 milliós számához képest igen csekély; egyrészt ez teszi érthetővé a „ tényszámoknak" a várhatótól való eltéréseit. Közrejátszik továbbá az is, hogy az első 1000 húzásban, a kihúzott összesen 5000 számban magasan fölényben voltak a páratlanok, $2560 : 2440 = 1{,}049$ arányban. (Manapság is 1,02 körüli ez az arány.)

Megpróbálhatjuk „kiszűrni" az utóbbi tényt az első, illetve utolsó hely eredményeiből. A páratlanok 523-as, 501-es „tényszámait" csak 2560 : 2440 arányban csökkentve használjuk fel: 498,5-öt, illetve 477,5-et veszünk figyelembe, és így számítjuk az arányokat:

$$\begin{aligned} 498{,}5 &: (498{,}5 + 477) = 498{,}5 : 975{,}5 = 0{,}5110 \\ 499 &: (499 + 477{,}5) = \qquad\qquad\qquad 0{,}5110. \end{aligned}$$

A két különböző tényanyagból meglepően egyformán 51,1%-os fölény mutatkozik a várt 51,4 %-kal szemben.

Hozzá kell azonban tenni: efféle „Megmagyarázom a bizonyítványomat" – jellegű számítások csak nagy körültekintéssel használhatók!

3. Érdekes apróság, hogy a legkisebb számra előfordult legnagyobb érték, másfelől a legnagyobbra előfordult legkisebb érték éppen aritmetikailag tükrösek: 65+26=91.