

Az egyenlet mindkét oldalából kettőt levonva, a bal oldal szorzattá alakítható:

$$(\sin px - 3)(\sin qx + 2) = -2.$$

Mivel $-4 \leq \sin px - 3 \leq -2$ és $1 \leq \sin qx + 2 \leq 3$, ezért a bal oldal abszolút értéke csak úgy lehet 2, ha

$$\sin px - 3 = -2 \quad \text{és} \quad \sin qx + 2 = 1,$$

azaz, ha

$$(1) \quad px = \frac{\pi}{2}(4n + 1) \quad \text{és} \quad qx = \frac{\pi}{2}(4m + 3),$$

alkalmas n, m egészekkel. Meg kell még vizsgálnunk, milyen n és m egészekre létezik az (1) egyenletrendszernek megoldása. Nyilván (1)-gyel ekvivalens egyenletrendszerekhez jutunk, ha a második egyenlet helyett a két eredeti egyenlet hányadosát szerepeltetjük:

$$(2) \quad x = \frac{\pi}{2p}(4n + 1), \quad \frac{p}{q} = \frac{4n + 1}{4m + 3}.$$

Ez viszont pontosan akkor oldható meg, ha

$$(3) \quad \frac{p}{q} = \frac{4n + 1}{4m + 3}.$$

Legyen p és q legnagyobb közös osztója d , ekkor $p = dp_1$ és $q = dq_1$, így

$$(3') \quad \frac{p_1}{q_1} = \frac{4n + 1}{4m + 3}.$$

A $\frac{p_1}{q_1}$ tört már nem egyszerűsíthető, ezért (3') csak akkor teljesül, ha valamilyen k egészszel

$$4n + 1 = kp_1 \quad \text{és} \quad 4m + 3 = kq_1.$$

A megoldhatósághoz itt nyilván szükséges, hogy p_1 és q_1 különböző maradékot adjanak 4-gyel osztva, tehát – mivel mindketten páratlanok – egyikük 1-et, a másik pedig -1 -et. A k egész ugyancsak páratlan, így $(4n + 1 = kp_1)$ miatt 4-gyel osztva ugyanazt a maradékot adja, mint p_1 , azaz

$$(5) \quad k = 4t + p_1.$$

Megfordítva, ha k értékét (5) szerint választjuk (tetszőleges t egészszel), akkor

$$\begin{aligned} kp_1 &= 4tp_1 + p_1^2 = 4tp_1 + (4v \pm 1)^2 = \\ &= 4(tp_1 + 4v^2 \pm 2v) + 1, \quad \text{ill.} \\ kq_1 &= (p_1 + q_1)k - kp_1 = 4sk - kp_1 = \\ &= 4(sk - tp_1 - 4v^2 \pm 2v) - 1 \end{aligned}$$

valóban a kívánt maradékot adja 4-gyel osztva; tehát (4) megoldható, és így az eredeti (1) egyenletrendszer is. (2), (4) és (5) alapján a megoldás:

$$x = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{4n + 1}{p} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{k}{d} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{4t + p_1}{d}.$$

Megjegyzések. 1. A beküldők közül többen nem vették észre, hogy az x -re nyert két egyenletnek nincs mindig közös megoldása (pl. $p = q = 1$ esetén sem!), ill., ha létezik is megoldás, n értéke nem lehet akármilyen egész szám.

2. Sokan eljutottak odáig, hogy $\sin px = 1$ és $\sin qx = -1$, innen azonban a $0 = \sin px + \sin qx = 2 \sin \frac{p+q}{2}x \cdot \cos \frac{p+q}{2}x$ egyenlőségéből következtettek valamelyik tényező eltűnésére. Így viszont hamis gyököket is kaptak, hiszen $\sin px + \sin qx$ nem csak úgy lehet nulla, hogy $\sin px = 1$ és $\sin qx = -1$.