

Jelöljük egy ilyen gömb középpontját O -val. Ha speciálisan A egybeesik B -vel, akkor minden O gömbközepppont egyenlő távolságra van A -tól és S -től. Az ilyen tulajdonságú pontok halmaza olyan forgási paraboloidfelület, amelynek tengelye merőleges az S síkra. Ezt a paraboloidot úgy is megkaphatjuk, hogy egy A -n átmenő, S -re merőleges síkban – melynek S -sel való metszete m – megkeressük az A -tól és m -től egyenlő távolságra lévő pontok mértani helyét. Ez egy parabola, amelynek tengelye körüli megforgatásával nyerhetjük az előbb említett paraboloidot. A paraboloidfelület minden pontja nyilván egy olyan gömb középpontja lehet, amely átmegegy A -n és érinti az S síkot.

1988-12-446-1.eps

Ha az AB szakasz párhuzamos S -sel, akkor a fenti gondolatmenet mind A -ra, mind B -re elmondható, s a gömbközepppontok mértani helye a két egybevágó forgási paraboloidfelület metszete lesz, ami parabola.

Ezt a tényt egyszerűbben is beláthatjuk. A két paraboloid nyilván szimmetrikus az AB szakasz felező merőleges síkjára. A keresett gömbközepppontok ebben a síkban vannak, a mértani hely tehát akármelyik előbbi paraboloidfelület és a felező merőleges sík metszete, vagyis parabola. Nyilván a parabola minden pontja megfelel.

Tegyük fel ezután, hogy AB egyenes nem párhuzamos S -sel, jelöljük a közös pontjukat C -vel. Legyen O egy megfelelő gömb középpontja, ennek S -re való vetülete D . Az S sík D -ben érinti a gömböt, ezért a C pontnak az A és B pontokon átmenő, O középpontú körre vonatkozó hatványa:

$$CD^2 = CA \cdot CB.$$

Ez azt jelenti, hogy CD állandó, tehát a D érintési pontok mértani helye egy $r = \sqrt{CA \cdot CB}$ sugarú kör. Ennek a körnek minden pontjához tartozik egy olyan O középpontú gömb, amely átmegegy A -n és B -n. A gömb középpontja egyfelől rajta van a D pontokban S -re állított merőleges egyenesek valamelyikén, tehát egy C körül r sugárral rajzolt kör alapú henger felületén, másfelől rajta van az AB szakasz felező merőleges síkján. Ezért a keresett mértani hely ebben az esetben egy hengerfelület és egy sík metszete, tehát ellipszis. (Speciálisan, a síkmetszet kör lesz, ha AB merőleges S -re.) Világos, hogy az ellipszis minden pontja megfelelő gömbközepppont.