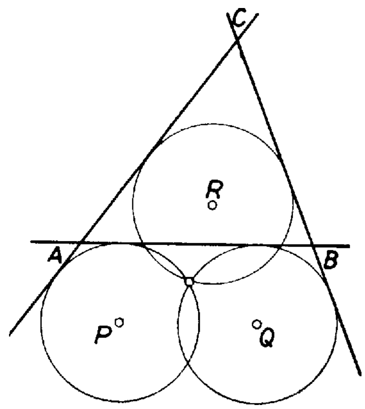
Tekintsük a feladatot megoldottnak. Jelölje a háromszög csúcsait A, B, C, a körök középpontját P, Q, R. Nézzük a háromszög egyik oldalát. Az oldalt érintő két (különböző) kör érinti a háromszög további 1-1 oldalát is, így a két kör középpontja az oldal egyenesének ugyanabban a félsíkjában van, mint ABC. Mivel a körök sugara egyenlő, a középpontjukat összekötő egyenes párhuzamos a kiszemelt oldallal. Ez mindegyik oldalra igaz, ezért a PQR háromszög hasonló az ABC háromszöghöz. A három kör közös pontja a P, Q, R pontoktól egyenlő távolságra van, ezért ez a pont a PQR háromszög köré írt körének a középpontja.

Ezután a feladatot úgy oldhatjuk meg, hogy szerkesztünk egy hasonló ábrát, és azt alkalmasan kicsinyítjük. Ezt a következőképpen tehetjük meg. Az ABC háromszög mindegyik csúcsa köré a háromszög köré írt kör középpontján is átmenő (és így egyenlő sugarú) köröket rajzolunk. Sorra mindegyik körpárnak húzzuk meg azt a közös érintőjét, amelyik nem metszi a harmadik kört. A három érintő olyan háromszöget határoz meg, amelyik hasonló az ABC háromszöghöz, és a három kör e háromszög oldalait a feladat követelményei szerint érinti. Tekintsük végül azt a hasonlósági transzformációt, amely ezt a háromszöget az ABC háromszögbe viszi át. Ez a transzformáció a három kört olyan körökbe képezi le, amilyeneket szerkeszteni kell.

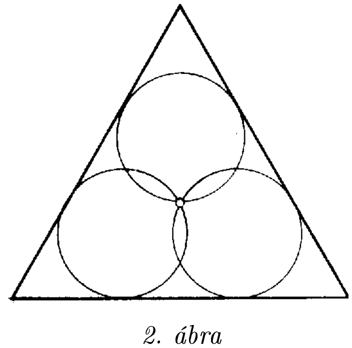
Megjegyzések: 1. Mivel az említett két háromszög „párhuzamosan" hasonló, középpontosan is hasonló, így könnyű látni, hogy a hasonlóság centruma a belső szögfelezők metszéspontja. A megoldásban azért kellett két kör közös érintői közül a harmadik kört nem metszőt választani, mert az „oldal" szót „szakasz" értelemben használjuk, és a hat érintési pont így biztosan az oldalak egy-egy pontja lesz. Azt is látjuk, hogy a feladatnak mindig van megoldása.



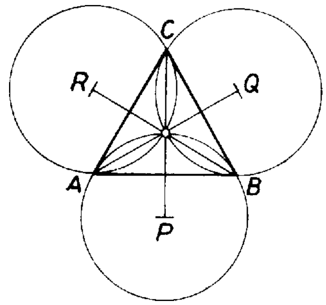
1. ábra

2. Ha a feladat szövegében „oldal" helyett „oldalegyenes" szerepel, a hasonló ábra készítésénél bármelyik két kör mindkét közös érintője számításba jön, és így az érintők $2 \cdot 3$ különböző hasonló háromszöget határoznak meg. E 8 megoldás egyikét vázoltuk az 1. ábrán. Itt a P és Q középpontú kör nem az AC, illetve BC oldalt, hanem azok meghosszabbítását érinti. Ez esetben a hasonlóság centruma a C csúcshoz tartozó belső, és a másik két csúcshoz tartozó külső szögfelező közös pontja. Ha ABC derékszögű háromszög, akkor az előbbi 8 megoldáson kívül még úgy is szerkeszthetők a körök, hogy azok közül kettő érintkező legyen. E négy megoldás egyikét az 5. ábra mutatja.

3. Eredeti feladatunkhoz visszatérve felvetődik a kérdés, hogy a 2. pontban említett (általánosabb értelemben vett) megoldások között van-e még olyan, amelyiknél valamennyi érintési pont az oldalakra (vagy pedig azok meghosszabbítására) esik. A 2. és a 3. ábra mindenesetre azt mutatja, hogy ha az ABC háromszög szabályos, akkor legalább két megoldás lehetséges. A 3. ábrán vázolt esetben a hasonló ábra szerkesztésekor bármelyik két kör közös érintőjét úgy választhatjuk, hogy az messe a harmadik kört.

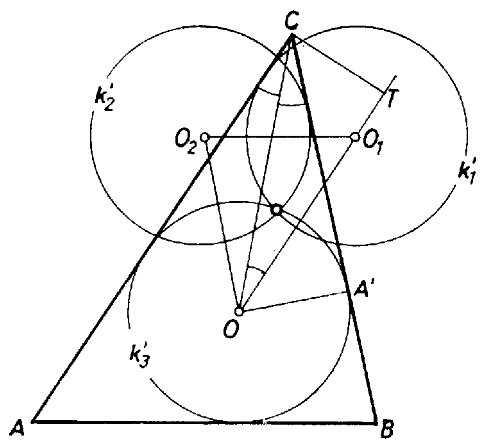


2. ábra

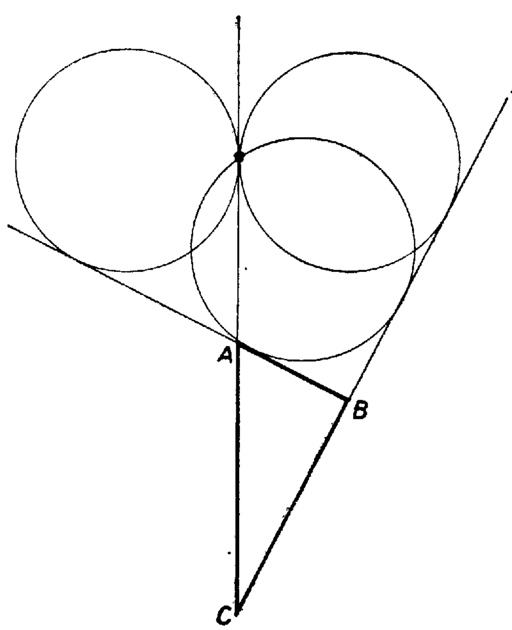


3. ábra

Megmutatjuk, hogy ha az ABC háromszög nem szabályos, akkor a feladatnak pontosan egy megoldása van, szabályos háromszög esetén pedig csak a fenti két megoldás létezik. Ehhez a 2. pontban szereplő eseteket egyenként meg kell vizsgálni. Állításunk könnyen belátható minden olyan esetben, amikor a háromszög megszerkesztéséhez felhasznált közös érintők valamelyike nem metszi az őt nem érintő harmadik kört; a részleteket az Olvasóra hagyjuk.



4. ábra



5. ábra

Tegyük fel viszont, hogy az ABC háromszöghöz található három, egy ponton átmenő, egyenlő sugarú k_1, k_2, ill. k_3 kör úgy, hogy ezek rendre érintik az AC és AB, BC és AB, ill. AC és BC oldalakat, továbbá metszik a BC, AC, ill. AB oldalt. Feltehetjük, hogy például $BC \leq AC \leq AB$. Kicsinyítsük a k_i köröket C-ből úgy, hogy a kapott k_1', k_2', k_3' körök közül k_3' éppen az ABC háromszögbe írt kör legyen (4. ábra). Jelölje k_1', k_2', és k_3' középpontjait O_1, O_2 és O;

C-ből az OO_1 egyenesre állított merőleges talppontja legyen T, végül jelöljük A'-vel azt a pontot, amelyben k_3' a BC oldalt érinti. Mivel k_1' érinti az AC oldalt, ezért

$$OO_1 \le OT. \tag{1}$$

Mint azt már korábban láttuk, az O_1O_2O háromszög hasonló ABC-hez, a hasonlóság aránya pedig $\dfrac{r}{R}$, ahol r az ABC háromszögbe, R pedig a háromszög köré írható körnek a sugara. Így (a háromszög oldalait és szögeit a szokásos módon jelölve)

$$OO_1 = \frac{r}{R}b. \tag{2}$$

Az OTC és az $OA'C$ derékszögű háromszögek egybevágók, hiszen közös OC átfogójukon kívül egyik hegyesszögük $\dfrac{\gamma}{2}$; ezért

$$OT = CA' = \frac{1}{2}(a+b-c), \tag{3}$$

(1), (2) és (3) alapján

$$\frac{r}{R}\, b \le \frac{1}{2}(a+b-c),$$

azaz (a háromszög területét t-vel jelölve)

$$\frac{a+b-c}{b} \ge \frac{2r}{R} = \frac{4t}{a+b+c} \cdot \frac{4t}{abc},$$

$$a+b-c \ge \frac{16t^2}{ac(a+b+c)} = \frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{ac},$$

így

$$ac \ge \Big(a+(c-b)\Big) \cdot \Big(c+(b-a)\Big).$$

Mivel feltevésünk szerint $c \ge b \ge a$, ezért a fenti egyenlőtlenségből $c-b=0=b-a$ következik; az ABC háromszög tehát szabályos.