Legyen az adott kör k, középpontja O, sugara r, az adott pont pedig P. Egy a k-t érintő és P-n átmenő kör legyen k_1, középpontja X, sugara R.

Először azt az esetet vizsgáljuk, amikor P a k-n kívül van. Ekkor k-t kívülről is, belülről is érintheti a k_1 kör, és ennek megfelelően minden ilyen X középpontra

$$OX = R + r \quad \text{vagy} \quad OX = R - r, \tag{1}$$

hiszen nyilvánvalóan O, X és a két kör érintési pontja egy egyenesen van. Tekintve, hogy $PX = R$, az (1) egyenletekből:

$$|OP - PX| = r. \tag{2}$$

Megfordítva, ha az X pont kielégíti a (2) összefüggést, akkor megfelel a feladat követelményeinek, ugyanis a k kör az X középpontú XP sugarú kört érinteni fogja.

Az első esetben tehát a keresett mértani hely pontosan azoknak az X pontoknak a halmaza, amelyek kielégítik (2)-t. Mint tudjuk, ezek annak a hiperbolának pontjai, amelynek valós tengelye r hosszúságú, fókuszai pedig O és P. Ez a hiperbola biztosan létezik, hiszen $OP > r$.

Ha a P pont a k körön van, akkor a keresett körközéppontok az OP egyenesen lehetnek, és ennek az O pont kivételével az egyenes minden pontja megfelel.

Hátravan még az az eset, amikor P a k körön belül van. Ekkor az első esethez hasonlóan minden lehetséges X körközéppontra

$$OX = r - R,$$

amiből

$$OX + PX = r, \tag{3}$$

és minden (3)-at kielégítő X pont megfelel.

Ebben az esetben tehát a keresett mértani hely éppen azoknak az X pontoknak a halmaza, amelyek kielégítik (3)-at. Ezek most annak az ellipszisnek a pontjai, amelynek nagytengelye r hosszúságú, fókuszai pedig O és P. Az ellipszis nyilván létezik, hiszen $OP < r$.