Megoldásunk legfontosabb mozzanata az lesz, hogy az $x^y - y^x$ kifejezésről különböző becslések alkalmazásával megmutatjuk, hogy az értéke a „legtöbb esetben” 1-nél nagyobb, ill. kisebb. A „néhány” fennmaradó $(x,\ y)$ pár közül ezután már könnyű lesz a megoldásokat kiválasztani. A becslések során felhasználjuk majd, hogy tetszőleges pozitív d-re és n természetes számra fennáll az

$$\left(1+\frac{d}{n}\right)^n < e^d$$

egyenlőtlenség, ahol e a természetes logaritmus alapját jelöli; ennek nagyságáról csupán annyit használunk fel, hogy $e < 2,8$.

Egyenletünknek nyilván nincs olyan megoldása, melyre $x = y$; így két fő esetet különböztetünk meg.

1. eset: $x > y$.

Legyen $x = y + d$, ahol $d \geqq 1$. Tegyük fel, hogy $y \geqq 3$; ekkor

$$y^d \geqq 3^d > e^d > \left(1+\frac{d}{y}\right)^y$$

miatt

$$x^y - y^x = (y+d)^y - y^{y+d} = y^y\left(\left(1+\frac{d}{y}\right)^y - y^d\right) < y^y(e^d - y^d) \leqq y^y(e^d - 3^d) < 0.$$

Ebben az esetben tehát csak olyan megoldás létezhet, amelyre $y = 1$, vagy $y = 2$. Ha $y = 1$, akkor szükségképpen $x = 2$, ez megoldás. Ha $y = 2$, akkor egyenletünk (x-re) a következő:

$$x^2 - 2^x = 1.$$

Mivel $x > y$, ezért az első szóba jövő érték $x = 3$, és ez ($y = 2$-vel) valóban megoldás. $x = 4$ nem megoldás, ha pedig $x \geqq 5$, akkor indukcióval megmutatjuk, hogy $2^x - x^2 > 2$ (vagyis az egyenlet bal oldala ilyenkor (-2)-nél kisebb. $x = 5$-re ez igaz; tegyük fel, hogy igaz valamilyen, 4-nél nagyobb x-re, akkor $2^x - x^2 > 2$ alapján

$$2^{x+1} - (x+1)^2 = 2\cdot 2^x - \left(\frac{x+1}{x}\right)^2 x^2 > 2\cdot 2^x - \frac{36}{25}x^2 > 2(2^x - x^2) > 2\cdot 2 > 2;$$

az egyenlőtlenség tehát minden, 4-nél nagyobb egészre teljesül. Az $x > y$ esetben így a találtakon kívül nincs más megoldás.

2. eset: $x < y$.

Most az $y = x + d$ jelölést vezetjük be, ahol $d \geqq 1$.

Tegyük fel, hogy $x \geqq 3$, ekkor

$$x^y - y^x = x^{x+d} - (x+d)^x = x^x\left(x^d - \left(1+\frac{d}{x}\right)^x\right) >$$
$$> x^x(x^d - e^d) \geq 3^3(3^d - e^d) \geqq 3^3(3-e) > 1;$$

a megoldásként szóba jövő számok tehát csak $x = 1$ és $x = 2$. Ha $x = 1$, akkor az egyenletből $y = 0$, ez nem megoldás.

Ha $x = 2$, akkor az egyenlet:

$$2^y - y^2 = 1.$$

Az 1. eset vizsgálatánál beláttuk, hogy ennek az összefüggésnek a bal oldala 2-nél nagyobb, ha y legalább 5. Marad $y = 3$ és $y = 4$, de ezek egyike sem megoldás.

Az egyenletnek eleget tevő számpárok így a következők:

$$x_1 = 2,\ y_1 = 1 \text{ és } x_2 = 3,\ y_2 = 2.$$