I. megoldás. Legyen $a_1 = a+x$, $a_2 = a+y$, $a_3 = a+z$, ahol $x,\ y,\ z \geqq 0$. Mivel $1 = a_1+a_2+a_3 = 3a+(x+y+z)$, ezért

$$x+y+z = 1-3a. \tag{1}$$

Azt kell igazolnunk, hogy

$$(a+x)^2+(a+y)^2+(a+z)^2 \leqq 6a^2-4a+1,$$

azaz

$$x^2+y^2+z^2+2a(x+y+z)+3a^2 \leqq 6a^2-4a+1.$$

Ebbe (1)-et beírva majd rendezve, az

$$x^2+y^2+z^2 \leqq 9a^2-6a+1$$

egyenlőtlenséghez jutunk. Mivel a jobb oldalon $(1-3a)^2 = (x+y+z)^2$ áll, így mindössze azt kell bizonyítanunk, hogy

$$x^2+y^2+z^2 \leqq (x+y+z)^2.$$

Mivel a jobb és a bal oldal különbsége: $2(xy+xz+yz) \geqq 0$, hiszen $x,\ y,\ z \geqq 0$, az egyenlőtlenség valóban fennáll.

Istenes Péter (Budapest, Árpád Gimn., III. o. t.)

II. megoldás. Tekintsük az $y = x^2$ egyenletű parabola $P_1(a_1,\ a_1^2)$, $P_2 = (a_2,\ a_2^2)$, $P_3 = (a_3,\ a_3^2)$ pontjaiból alkotott háromszög S súlypontját. Ennek koordinátái: $\dfrac{a_1+a_2+a_3}{3} = \dfrac{1}{3}$ és $\dfrac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{3}$. Mivel az a_i számok mindegyike legalább a, ezért $a_i = 1-a_j-a_k \leqq 1-2a$. Jelölje Q és R a parabola azon pontjait, melyeknek koordinátái a és a^2, illetve $1-2a$ és $(1-2a)^2$. Az $y = x^2$ függvény konvex, ezért a teljes $P_1P_2P_3$ háromszög a QR szakasz alatt helyezkedik el. Speciálisan S ordinátája is legfeljebb akkora, mint a QR szakasz $\dfrac{1}{3}$ abszcisszájú pontjáé. Mivel ez a pont QR-nek a Q-hoz közelebbi harmadolópontja, ezért azt kapjuk, hogy

$$\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{3} \leqq \frac{2a^2+(1-2a)^2}{3},$$

amit bizonyítani akartunk.

Megjegyzések. 1. Mindkét bizonyításból könnyen adódik, hogy a bizonyítandó egyenlőtlenségben az egyenlőség feltétele pontosan az, hogy $a_1,\ a_2,\ a_3$ közül kettő a-val, egy pedig $(1-2a)$-val egyezzen meg.

2. A második megoldás alapján megfogalmazhatjuk a feladat következő általánosítását: ha f konvex függvény, továbbá $a_1,\ a_2,\ a_3 \geqq a$ és $a_1+a_2+a_3 = A$, akkor $f(a_1)+f(a_2)+f(a_3) \leqq 2f(a)+f(A-2a)$. Ugyanezzel a gondolatmenettel bizonyítható be a megfelelő állítás 3 helyett n valós számra is:

Ha $a_1,\ \ldots,\ a_n \geqq a$, $\sum_{i=1}^{n} a_i = A$, és az f függvény konvex, akkor $f(a_1)+\ldots+f(a_n) \leqq (n-1)f(a)+f(A-(n-1)a)$.