I. megoldás. A bizonyítandó egyenlőtlenséget több lépésben úgy fogjuk alakítani, hogy az átalakított egyenlőtlenségek az eredetivel ekvivalensek legyenek. Végül olyan egyenlőtlenséghez jutunk, amelyet már egyszerűen igazolhatunk. Írjuk be az

$$s=\frac{a+b+c}{2},\quad s-a=\frac{-a+b+c}{2},\quad s-b=\frac{a-b+c}{2},\quad s-c=\frac{a+b-c}{2}$$

kifejezéseket, továbbá osszuk mindkét oldalt 2-vel. Ekkor kapjuk:

$$\frac{ab}{a+b-c}+\frac{bc}{-a+b+c}+\frac{ca}{a-b+c}\geqq a+b+c. \tag{1}$$

Mivel a, b és c egy háromszög oldalai, mindegyik nevező pozitív. Tovább alakítva:

$$\begin{gathered}ab(-a+b+c)(a-b+c)+bc(a+b-c)(a-b+c)+ca(a+b-c)(-a+b+c)\geqq\\ \geqq(a+b+c)(a+b-c)(-a+b+c)(a-b+c).\end{gathered}$$

amiből

$$\begin{gathered}ab[c^2-(a-b)^2]+bc[a^2-(b-c)^2]+ca[b^2-(a-c)^2]\geqq\\ \geqq[2ab+(a^2+b^2-c^2)][2ab-(a^2+b^2-c^2)],\end{gathered}$$

azaz

$$\begin{gathered}ab(c^2-a^2+2ab-b^2)+bc(a^2-b^2+2bc-c^2)+ca(b^2-a^2+2ac-c^2)\geqq\\ \geqq 4a^2b^2-(a^4+b^4+c^4+2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2).\end{gathered}$$

(Közben többször is felhasználtuk az $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$ azonosságot.)

Az így kapott egyenlőtlenségben a kijelölt műveleteket elvégezve, nullára redukálva és alkalmasan csoportosítva:

$$(a^4-a^3b-a^3c+a^2bc)+(b^4-b^3a-b^3c+b^2ac)+(c^4-c^3a-c^3b+c^2ab)\geqq 0.$$

Az egyes csoportokat szorzattá alakítva:

$$a^2(a-b)(a-c)+b^2(b-a)(b-c)+c^2(c-a)(c-b)\geqq 0. \tag{2}$$

A bizonyítandó állítás a, b és c-ben szimmetrikus, ezért föltehetjük, hogy $a\leqq b\leqq c$.

Ekkor (2) első tagja biztosan nem negatív, a másik két tag összege pedig így becsülhető:

$$\begin{gathered}b^2(b-a)(b-c)+c^2(c-a)(c-b)=(c-b)\big(b^2(a-b)+c^2(c-a)\big)\geqq\\ \geqq(c-b)\big(b^2(a-b)+b^2(c-a)\big)=(c-b)^2b^2\geqq 0.\end{gathered}$$

Mivel (2) ekvivalens a bizonyítandó egyenlőtlenséggel, az állítást beláttuk. Az utolsó becslés alapján nyilvánvaló, hogy egyenlőség csak $a=b=c$ esetén áll fenn.

Bíró András (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., III. o. t.)

II. megoldás. Az (1) egyenlőtlenség mindkét oldalát osszuk el $(a+b+c)$-vel:

$$\frac{ab}{(a+b)^2-c^2}+\frac{bc}{(b+c)^2-a^2}+\frac{ca}{(a+c)^2-b^2}\geqq 1. \tag{3}$$

A koszinusztétel alapján pl. c^2 így írható:

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma=(a+b)^2-2ab(1+\cos\gamma),$$

amiből

$$\frac{ab}{(a+b)^2-c^2}=\frac{1}{2(1+\cos\gamma)},$$

ahol γ jelöli a c oldallal szemközti szöget. Hasonlóan fejezhető ki a (3) bal oldalán szereplő másik két hányados is; ezért (3) így alakul:

$$\frac{1}{2(1+\cos\alpha)}+\frac{1}{2(1+\cos\beta)}+\frac{1}{2(1+\cos\gamma)}\geqq 1,$$

azaz

$$\frac{3}{2} \geqq \frac{3}{\frac{1}{1+\cos\alpha} + \frac{1}{1+\cos\beta} + \frac{1}{1+\cos\gamma}}.$$

A jobb oldalon az $1+\cos\alpha,\ 1+\cos\beta,\ 1+\cos\gamma$ számok harmonikus közepe van, ami nem nagyobb, mint e számok számtani közepe. Elegendő tehát azt bizonyítani, hogy

$$\frac{3}{2} \geqq \frac{1+\cos\alpha+1+\cos\beta+1+\cos\gamma}{3},$$

vagyis

$$\frac{3}{2} \geqq \cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma,$$

ez pedig minden háromszögben igaz (lásd pl. *Molnár Emil*: Matematikai versenyfeladatok gyűjteménye, 342. old.). Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $\alpha=\beta=\gamma$.