Ismeretes, hogy

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{2n(2n-1)}{n\cdot n}\cdot\frac{(2n-2)(2n-3)}{(n-1)\cdot(n-1)}\cdot\ldots\cdot\frac{2\cdot 1}{1\cdot 1} = \tag{1}$$
$$= 4\cdot\frac{2n-1}{2n}\cdot 4\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\ldots\cdot 4\cdot\frac{1}{2} = 4^n\cdot\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}.$$

Mivel itt 4^n-nek és 1-nél kisebb pozitív számoknak a szorzata áll, ezért

$$\binom{2n}{n} < 4^n. \tag{2}$$

Ha viszont (1)-ben az $\frac{1}{2}$ kivételével mindegyik tört számlálóját 1-gyel csökkentjük, akkor azt kapjuk, hogy

$$\binom{2n}{n} > 4^n\cdot\frac{2n-2}{2n}\cdot\frac{2n-4}{2n-2}\cdot\ldots\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{4^n}{2n}. \tag{3}$$

A (2) és (3) egyenlőtlenségekben n-edik gyököt vonva tehát

$$\frac{4}{\sqrt[n]{2n}} < \sqrt[n]{\binom{2n}{n}} < 4 \tag{4}$$

adódik.

Megmutatjuk, hogy a nevezőben szereplő $\sqrt[n]{2n}$ sorozat 1-hez tart. Nyilván $\sqrt[n]{2n} > 1$ minden pozitív egész n-re, továbbá $n \geqq 3$ esetén a számtani és mértani közép közötti összefüggés értelmében

$$\sqrt[n]{2n} = \sqrt[n]{2\cdot\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1} < \frac{2+2\sqrt{n}+(n-3)}{n} = 1+\frac{2}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n}.$$

Az

$$1 < \sqrt[n]{2n} < 1+\frac{2}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n}$$

egyenlőtlenségek szerint $\sqrt{2n}$ két, egyaránt 1-hez tartozó sorozat közé esik, így a „rendőrszabály” alapján ugyancsak 1 a határértéke.

A (4) bal oldalán álló $\frac{4}{\sqrt[n]{2n}}$ sorozat határértéke tehát 4, ezért ismét a „rendőrszabály” alkalmazásával kapjuk, hogy $\sqrt[n]{\binom{2n}{n}}$-nek létezik határértéke, és az 4.

Megjegyzések. 1. A (2), (3) egyenlőtlenségeket más módszerrel is beláthatjuk: $\binom{2n}{n}$ ugyanis egy $2n$-elemű halmaz n-elemű részhalmazainak a száma, s így nyilván kisebb az összes részhalmazok számánál, $2^{2n} = 4^n$-nél. Figyelembe véve továbbá, hogy $\binom{2n}{n}$ a legnagyobb a $\binom{2n}{k}$ alakú binomiális együtthatók között, nagyobb a $\binom{2n}{1}$, $\binom{2n}{2}$, $\ldots$, $\binom{2n}{2n-1}$ számok átlagánál, azaz $\frac{2^{2n}-2}{2n-1}$-nél is.

Könnyen belátható, hogy

$$\frac{2^{2n}-2}{2n-1} \geqq \frac{4^n}{2n}.$$

2. Az ún. Stirling-formula segítségével megmutatható, hogy $\binom{2n}{n}\cdot\frac{\sqrt{n}}{4^n}$ konvergens, és a határértéke $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$; így pl. a (3)-nál jóval erősebb $\binom{2n}{n} > \frac{4^n}{10\sqrt{n}}$ egyenlőtlenség is igaz.