I. megoldás. Vonjuk ki az egyenlet mindkét oldalából a harmadik tagot, s emeljünk négyzetre. Így $z = x^2$-re harmadfokú egyenletet kapunk, amit rendezve

$$32z^3 - 48z^2 + 18z - 1 = 0$$

alakra hozhatunk.

Vezessük be az $u = 2z$ ismeretlent, ekkor a

$$4u^3 - 12u^2 + 9u - 1 = 0$$

egyenletet kapjuk. Itt az együtthatók összege nulla, azaz $u = 1$ gyöke az egyenletnek. Az $(u-1)$ gyöktényezőt kiemelve

$$(u-1)(4u^2 - 8u - 1) = 0.$$

Az egyenlet gyökei

$$u_1 = 1, \quad u_2 = \frac{4+\sqrt{12}}{4} \quad \text{és} \quad u_3 = \frac{4-\sqrt{12}}{4},$$

így

$$z_1 = \frac{1}{2}, \quad z_2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4}, \quad z_3 = \frac{2-\sqrt{3}}{4}.$$

Az eredeti egyenlet lehetséges megoldásai tehát:

$$x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x_{3,4}\frac{\pm\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}, \quad x_{5,6} = \frac{\pm\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

Minthogy négyzetre emelést is végeztünk, a kapott megoldások helyességét ellenőrizni kell. Ezt (a kissé fáradságos munkát) elvégezve azt kapjuk, hogy a megoldások:

$$x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x_3 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \quad \text{és} \quad x_5 = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

II. megoldás. A $\sqrt{1-x^2}$ kifejezésnek csak akkor van értelme, ha $-1 \leqq x \leqq 1$; minden ilyen x-re van olyan α szög -90° és 90° között, amelyre $x = \sin\alpha$. Ezzel a helyettesítéssel az egyenlet:

$$4\sin^3\alpha - 3\sin\alpha + (1 - 4\sin^2\alpha)\cos\alpha = 0.$$

(Felhasználtuk, hogy $\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \cos\alpha$, ha $-90^\circ \leqq \alpha \leqq 90^\circ$.) Ismeretes, hogy $4\sin^3\alpha - 3\sin\alpha = -\sin 3\alpha$ és $(1 - 4\sin^2\alpha)\cos\alpha = (4\cos^2\alpha - 3)\cos\alpha = \cos 3\alpha$. Ebből adódik, hogy $\sin 3\alpha = \cos 3\alpha$.

Ennek megoldása:

$$3\alpha = 45^\circ + k\cdot 360^\circ \quad \text{és} \quad 3\alpha = -135^\circ + k\cdot 360^\circ.$$

A -90° és 90° közé eső α értékek tehát:

$$\alpha_1 = 15^\circ, \quad \alpha_2 = 75^\circ, \quad \alpha_3 = 45^\circ,$$

így az eredeti egyenletnek a megoldása :

$$x_1 = \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}, \; x_2 = \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}, \; x_3 = \sin(-45^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Mivel most ekvivalens átalakításokkal jutottunk a megoldáshoz, a behelyettesítésre nincs szükség.