I. megoldás. Könnyen észrevehető, hogy ha $a+b+c=0$, akkor minden, az $x=y=z$ kikötésnek eleget tevő számhármas megoldás.

Az is világos, hogy ha $a=b=c$, akkor minden olyan számhármas megoldás, amelyre $x+y+z=0$.

A továbbiakban föltesszük, hogy $a+b+c\neq 0$, és a, b, c közül legalább kettő különböző, végül feltesszük, hogy az egyenletrendszernek létezik egy olyan x_1, y_1, z_1 megoldása, ahol $z\neq 0$.

Bevezetve az

$$x'=\frac{x_1}{z_1},\ y'=\frac{y_1}{z_1}$$

számokat, ezekre:

$$ax'+by'=-c,\quad bx'+cy'=-a \ \text{ és } \ cx'+ay'=-b.$$

A három egyenletet összeadva, majd $a+b+c\neq 0$-val osztva az $x'+y'=-1$ egyenlethez jutunk. Az $y'=-1-x'$ összefüggést az újabb három egyenletünkbe helyettesítve:

$$(a-b)x'=b-c,\quad (b-c)x'=c-a \ \text{ és } \ (c-a)x'=a-b.$$

Látható, hogy a, b, c közül semelyik kettő sem lehet egyenlő, ui. ha pl. $a=b$, akkor az első egyenletből $b=c$, tehát $a=b=c$, amit kizártunk. Ha összeszorozzuk e három egyenletet, az

$$(a-b)(b-c)(c-a)(x'^3-1)=0$$

egyenlethez jutunk. Itt $(a-b)(b-c)(c-a)\neq 0$, tehát $x'^3=1$, amiből $x'=1$, így $a-b=b-c=c-a$. E három – egymással egyenlő – szám összege nulla, egyenlők tehát csak úgy lehetnek, ha mindegyikük nulla, amit viszont kizártunk. Feltevésünkkel ellentmondásra jutottunk. A feladatban szereplő egyenletrendszernek ezért az $x=y=z=0$ esettől különböző megoldása két esetben van: ha $a+b+c=0$ vagy ha $a=b=c$.

II. megoldás. Ismeretes, hogy egy homogén lineáris egyenletrendszernek – amilyen a feladatban is szerepel – pontosan akkor van nem triviális (nem csupa nulla) megoldása, ha determinánsa nulla. A mi esetünkben ez a determináns:

$$0=\begin{vmatrix} a & b & c\\ b & c & a\\ c & a & b\end{vmatrix}=3abc-a^3-b^3-c^3=-\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2].$$

Innen két esetet kapunk: Vagy $a+b+c=0$ (amikor minden $x=y=z$ számhármas megoldás), vagy $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$, azaz $a=b=c$ (amikor minden olyan számhármas megoldás, amelyre $x+y+z=0$). Minden más esetben csak a triviális megoldás létezik.