I. megoldás. Legyen az ABP háromszög AP-hez tartozó magassága BM_B, az APC háromszög AP-hez tartozó magassága pedig CM_C. Világos, hogy $BM_B + CM_C \le BC$, ezért a két háromszög kétszeres területének összege nem nagyobb, mint $PA \cdot BC$, azaz

$$PA \cdot BC \geqq AB \cdot PC_0 + AC \cdot PB_0.. \tag{1}$$

1988-11-364-1.eps

Jelölje P tükörképét a BAC szög felezőjére P', a C_0 és B_0 pont tükörképét C_0' ill. B_0'. Mivel az (1) állítás minden olyan P-re igaz, amely a BAC szögtartományban van, teljesülni fog P'-re is (még akkor is, ha esetleg P' az ABC háromszögnek nem belső pontja).

Ezért

$$P'A \cdot BC \geqq AB \cdot P'B_0 + AC \cdot P'C_0'.$$

A tükrözés miatt $P'A = PA,\ \ P'B_0' = PB_0',\ \ P'C_0' = PC_0$, így

$$PA \cdot BC \geqq AB \cdot PB_0 + AC \cdot PC_0. \tag{2}$$

Összeadva az (l) és (2) egyenlőtlenségeket:

$$2 \cdot PA \cdot BC \geqq (AB + AC)(PC_0 + PB_0). \tag{3}$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$2 \cdot PB \cdot AC \geqq (AB + BC)(PA_0 + PC_0), \tag{4}$$

$$2 \cdot PC \cdot AB \geqq (AC + BC)(PA_0 + PB_0). \tag{5}$$

A (3), (4) és (5) egyenlőtlenségeket összeszorozva :

$$8 \cdot PA \cdot PB \cdot PC \cdot AB \cdot BC \cdot AC \geqq$$
$$\geqq (AB + BC)(BC + CA)(CA + AB)(PC_0 + PB_0)(PA_0 + PB_0)(PA_0 + PC_0).$$

Nyilván $AB + BC \geqq 2 \cdot \sqrt{AB \cdot BC}$, $BC + CA \geqq 2 \cdot \sqrt{BC \cdot CA}$, $CA + AB \geqq 2\sqrt{CA \cdot AB}$; a jobb oldal első három tényezőjét eképpen becsülve, majd mindkét oldalt $8 \cdot AB \cdot BC \cdot CA$-val osztva, előbbi egyenlőtlenségünkből éppen a feladat állítását kapjuk.

II. megoldás. Használjuk az ábra jelöléseit. Az A_0PC és B_0PC derékszögű háromszögekből

$$PA_0 + PB_0 = PC(\sin\gamma_1 + \sin\gamma_2).$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$PA_0 + PC_0 = PB(\sin\beta_1 + \sin\beta_2) \text{ és}$$
$$PB_0 + PC_0 = PA(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2).$$

Ezeknek az egyenleteknek a szorzatából:

$$PA \cdot PB \cdot PC(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2)(\sin\beta_1 + \sin\beta_2)(\sin\gamma_1 + \sin\gamma_2) =$$
$$= (PA_0 + PB_0)(PA_0 + PC_0)(PB_0 + PC_0).$$

Elég megmutatni, hogy a bal oldalon szereplő zárójeles tényezők szorzata legfeljebb 1. Ismert azonosság szerint pl.

$$\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 = 2 \cdot \sin\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\cos\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \leqq 2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2},$$

ahol $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ az A csúcsnál levő szög. Ezért

$$(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2)(\sin\beta_1 + \sin\beta_2)(\sin\gamma_1 + \sin\gamma_2) \leqq 8 \cdot \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2},$$

és mint ismeretes (1. az alábbi megjegyzésekben szereplő szakköri füzet 240. oldalán)

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \leqq \frac{1}{8},$$

amiből már következik a feladat állítása.

Megjegyzések. 1. A feladatbeli szakaszokra fennállnak további egyenlőtlenségek is, pl.

$$PA \cdot PB \cdot PC \geqq 8 \cdot PA_0 \cdot PB_0 \cdot PC_0.$$

Ezt beláthatjuk, ha a kitűzött állítás jobb oldalán levő összegeket a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján becsüljük.

2. Erdős–Mordell tételként ismerjük a következő egyenlőtlenséget:

$$PA + PB + PC \geqq 2(PA_0 + PB_0 + PC_0).$$

Ennek a tételnek és néhány hasonló állításnak a bizonyítása megtalálható *Bartha Gábor–Kun Péter:* Válogatott fejezetek a matematikából c. szakköri füzet VI. fejezetében.