

Legyenek a négyzet átlói egy koordináta-rendszer tengelyei. Ekkor a négyzet csúcsai $A(a; 0)$, $B(0; a)$, $C(-a; 0)$, $D(0; -a)$, továbbá jelöljük a P pont koordinátáit x és y -nal, a k kör sugarát pedig r -rel. A távolságok négyzete:

$$(1) \quad \begin{aligned} AP^2 &= (x - a)^2 + y^2, & BP^2 &= x^2 + (y - a)^2, \\ CP^2 &= (x + a)^2 + y^2, & DP^2 &= x^2 + (y + a)^2. \end{aligned}$$

Ezekből az összefüggésekből

$$(2) \quad AP^2 + CP^2 = 2(x^2 + y^2) + 2a^2 = 2(r^2 + a^2)$$

$$(3) \quad BP^2 + DP^2 = 2(x^2 + y^2) + 2a^2 = 2(r^2 + a^2),$$

ahol felhasználtuk, hogy P rajta van a körön, tehát $x^2 + y^2 = r^2$.

(2) és (3) négyzetének összegéből

$$AP^4 + BP^4 + CP^4 + DP^4 = 8(r^2 + a^2)^2 - 2AP^2 \cdot CP^2 - 2BP^2 \cdot DP^2.$$

Ebből az (1)-ben szereplő összefüggésekkel

$$\begin{aligned} AP^4 + BP^4 + CP^4 + DP^4 &= 8(r^2 + a^2)^2 - 2(x^2 + y^2 + a^2 - 2ax)(x^2 + y^2 + a^2 + 2ax) - \\ &\quad - 2(x^2 + y^2 + a^2 - 2ay)(x^2 + y^2 + a^2 + 2ay) = 8(r^2 + a^2)^2 - 2[(r^2 + a^2)^2 - 4a^2x^2] - \\ &\quad - 2[(r^2 + a^2)^2 - 4a^2y^2] = 8(r^2 + a^2)^2 - 4(r^2 + a^2)^2 + 8a^2(x^2 + y^2) = \\ &\quad = 4(r^2 + a^2)^2 + 8a^2r^2 = 4(r^4 + a^4 + 4a^2r^2), \end{aligned}$$

ami valóban független a P koordinátáitól.

Hahn Zsuzsanna (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., IV. o. t.)