A feltétel a szabályos tetraéderre is érvényes, ekkor a következmény semmitmondó. Ezért azt is feltesszük, hogy a tetraédernek nem minden éle egyenlő. Használjuk az 1. ábra jelöléseit.

1988-10-308-1.eps

1. ábra

Legyen K az a pont, amelyben a beírt gömb az ABC lapot érinti. K-nak pl. A-tól való távolsága $KA=\sqrt{R^2-r^2}$, ahol R a tetraéder köré írt, r pedig a beírt gömb sugara. Ugyanekkora a KB és KC szakasz is, tehát K az ABC háromszög köré írt kör középpontja, és e kör sugara $\sqrt{R^2-r^2}$. Hasonlóan mutatjuk meg, hogy ugyanennyi a tetraéder többi lapja köré írt kör sugara is. Ezért pl. $ACB\sphericalangle=ADB\sphericalangle$, hiszen ugyanakkora sugarú körökben azonos húrhoz tartozó kerületi szögek. (Mivel K az ABC háromszög belső pontja, ABC – s így a tetraéder valamennyi lapja – hegyesszögű.) Az $ACB=ADB$ szöget γ-val jelöltük; hasonló okból egyenlők az ábrán azonos betűkkel jelölt szögek.

Az ABC és BCD háromszögek szögeinek összegére

$$\varepsilon+\delta+\gamma=\varepsilon+\alpha+\varphi,$$

így

(1)
$$\delta+\gamma=\alpha+\varphi.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

(2)
$$\delta+\varphi=\alpha+\gamma.$$

(1)-ből és (2)-ből $\gamma=\varphi$ adódik, és ugyanígy $\alpha=\delta$ és $\beta=\varepsilon$. Ezekből következik, hogy a tetraéder lapjai egybevágók, a szemközt fekvő, (kitérő) élek egyenlők.

Jelölje F a BC él felezőpontját. Az ABC és DCB háromszögek egybevágósága miatt $AF=DF$, így az ADF egyenlő szárú háromszög alapjának végpontjait a velük szemben fekvő szár F-hez közelebbi harmadolópontjával összekötő AA_1 és DD_1 szakaszok – a tetraéder A-ból, ill. D-ből induló súlyvonalai – egyenlők (2. ábra).

1988-10-309-1.eps

2. ábra

A lapok egybevágók lévén, tetraéderünk valamennyi súlyvonala egyenlő hosszúságú. A súlypont minden súlyvonalat a csúcstól számítva $3:1$ arányban oszt, így minden csúcstól egyenlő távolságra van. A súlypont tehát egybeesik a körülírt gömb középpontjával. A D csúcsból induló súlyvonal másik végpontja az ABC lap S súlypontja. O-nak, a gömb középpontjának az ABC lap síkjára eső merőleges vetülete – amint azt korábban megállapítottuk – éppen az ABC háromszög köré írt kör K középpontja. KS meghatározza az ABC háromszög Euler-egyenesét, ami egyértelműen meg van határozva, mert a lapok nem szabályos háromszögek, ezért a DS súlyvonal merőleges vetülete az ABC lap Euler-egyenese. Ezen rajta van az ABC háromszög M magasságpontja és a D csúcs V vetülete is. Az Euler-egyenesen

(3)
$$KM=3\cdot KS.$$

A párhuzamos szelők tétele szerint

$$VK:KS=DO:OS=3:1,$$

így

(4)
$$VK=3KS.$$

(3) és (4) alapján tehát $VK=KM$, következésképpen $OV=OM$. Az OM átfogójú OKM derékszögű háromszög OK befogójának hossza a tetraéderbe írt gömb sugara, a másik befogóé pedig az ABC háromszög köré írt kör középpontjának és a háromszög magasságpontjának a távolsága. A tetraéder lapjainak egybevágósága miatt tehát az $OV=OM$ távolság nem függ az ABC lap megválasztásától.

1988-10-309-2.eps

3. ábra

Balogh 171 József (Szeged, JATE Ságvári E. Gyak. gimn., II. o. t.)
dolgozata alapján