I. megoldás. Legyen a két kör középpontja O_1, illetve O_2, az érintkezési pontjuk pedig M. Az E-ben és F-ben állított merőlegesek metszéspontja G (1. ábra).

1988-10-305-1.eps

1. ábra

Az EO_1M és MO_2F egyenlő szárú háromszögek alapon fekvő szögei α, illetve β. Ezért ezeknek a háromszögeknek O_1, illetve O_2-nél lévő külső szögei 2α, illetve 2β. Így az O_1GO_2 derékszögű háromszögből $2\alpha+2\beta=90^\circ$, azaz $\alpha+\beta=45^\circ$. Ebből következik, hogy $EMF\sphericalangle=135^\circ$, vagyis az 1. ábrán megrajzolt helyzetben M rajta van az EF szakasz fölötti 135°-os látóköríven. Feladatunknak azonban olyan megoldásai is lehetnek (lásd 2. ábra), amelyekben az O_1 vagy az O_2 középpontú kör az e, illetve f egyenes másik félsíkjában van.

1988-10-306-1.eps

2.a ábra

1988-10-306-2.eps

2.b ábra

1988-10-306-3.eps

2.c ábra

1988-10-306-4.eps

2.d ábra

Ezekben az esetekben az EF szakasz másik 135° szögű látókörívén, vagy az EF 45° szögű látókörívein találjuk az M pontot. A 2.*c)* ábrán vázolt esetben az EF „alatti" 45° szögű látóköríven lesz az M pont (sőt azt is láthatjuk, hogy ennek a látókörívnek a „harmadik síknegyedbe" eső részén). A 3. ábrán megrajzoltuk az EF húrra illeszkedő látóköríveket, és megvastagítottuk azokat az íveket, amelyeken az M elhelyezkedhet.

1988-10-306-5.eps

3. ábra

Legyen EF felezőpontja P. Mivel az M érintési pont a két kör hasonlósági pontja, és a hasonlóság aránya $1:1$, M felezi az F_1F szakaszt, ezért MP az EF_1F háromszög középvonala. Világos, hogy EF_1 45°-os szöget zár be OE-vel, tehát MP is. Az M pont így megszerkeszthető, mert rajta van a fentebb említett valamelyik látóköríven és az EF felezőpontján átmenő, OE-vel 45°-os szöget bezáró egyenesen. Mivel ilyen egyenes kettő van, a 3. ábrán vastagon kihúzott ívekkel négy metszéspont lehetséges. M ismeretében a körök egyszerűen szerkeszthetők.

Megjegyzés. A 3. ábra tulajdonképpen az e, illetve f egyenest E, illetve F-ben érintő és egymást is érintő (tetszőleges sugarú) körök érintkezési pontjainak mértani helyét adja meg. A megvastagított ívek a kívülről érintkező, a többi ív a belülről érintkező körpárok érintési pontjainak mértani helye.

1988-10-307-1.eps

4. ábra

II. megoldás. Használjuk a 4. ábra jelöléseit. Feladatunk az EO_1O_2F töröttvonal megszerkesztése, ahol tudjuk, hogy $EO_1=O_2F=r$, és ismerjük e két szakasz irányát, továbbá azt is, hogy $O_1O_2=2r$. Legyen az O_1-ből O_2F-fel párhuzamosan húzott sugár másik végpontja F'.

Az $EO_1F'F$ töröttvonal könnyen megszerkeszthető, mert első két szakaszának nagyságát és irányát ismerve, tudunk hozzá hasonlót szerkeszteni. Mérjünk fel EO_1-re E-ből tetszőleges szakaszt, legyen ennek másik végpontja O_1^*. O_1^* -ban EO_1^* -re állított merőlegesre mérjük rá az EO_1^* szakaszt, így kapjuk az F^* pontot. F^*-ból $F'F$-fel húzott párhuzamos az N pontban metszi az EF szakaszt. Az $EO_1^*F^*\sim EO_1F'$ és $EF^*N\sim EF'F$ hasonlóságokból következik, hogy F^*N kétszerese az EO_1^* szakasznak, hiszen $F'F$ is kétszerese EO_1-nek. Ezért N megszerkeszthető, mint az F^* köré rajzolt $2\cdot EO_1^*$ sugarú kör és EF metszéspontja.

Az $EO_1^*F^*N$ töröttvonal középpontosan hasonló az $EO_1F'F$ töröttvonalhoz, és a hasonlóság középpontja E. Ezért a rajzot úgy nagyítjuk, hogy N az F pontban menjen át, és közben kapjuk az F' és az O_1 pontokat. A feladatnak négy megoldása lesz, mert az F^* középpontú $2 \cdot EO_1^*$ sugarú kör két pontban metszi az EF egyenest, továbbá O_1^* az e egyenes másik partján is lehet, mint O_1.

Megjegyzés. Ez a megoldás akkor is működik, ha az e és f félegyenesek nem merőlegesek. Hasonlóan az I. megoldás is használható, $2\alpha + 2\beta$ helyére $180^\circ - FGE\sphericalangle$ lép.

III. megoldás. $OE = a$ és $OF = b$ jelöléssel a 4. ábra alapján $(a-r)^2 + (b-r)^2 = 4r^2$. Ez $|r|$-re másodfokú egyenlet, amelynek gyöke – mint tudjuk – megszerkeszthető, és ezután megszerkeszthetők a körök is. A másik két gyök abszolút értéke adódik pl. a következő egyenletből: $(a+r)^2 + (b-r)^2 = 4r^2$.