Megmutatjuk, hogy a feladat kérdésére a válasz nemleges. Ehhez elegendő síkidomoknak egy olyan rendszerét megadni, amely végtelen sok síkidomból áll, és közülük egyik sem fedhető le a többivel. Téglalapokat adunk meg ebből a célból; legyenek ezek T_1, T_2, T_3, $\ldots$. Az n-edik téglalap, T_n oldalainak hosszúsága legyen 8^n és $\frac{1}{8^n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$. Belátjuk, hogy ekkor egyik téglalap sem fedhető le a többivel. Ez abból következik majd, hogy e téglalapokat akárhogyan helyezzük is el, T_n-ből a többiek által lefedett részek területének összege mindig kisebb T_n területénél, azaz 1-nél (minden n-re).

Legyen $n > k$; vizsgáljuk meg, hogy a téglalapok tetszőleges elhelyezése mellett legfeljebb mekkora lehet T_n és T_k közös részének a területe. Ha a közös rész nem üres, foglaljuk bele egy olyan téglalapba, amelynek két szemközti oldala T_n két hosszabbik oldalán van, másik két oldala pedig párhuzamos T_n rövidebbik oldalával; a legkisebb ilyen téglalap utóbbi oldalai nyilván tartalmaznak T_k-hoz tartozó pontokat – ezek közül egyet-egyet jelöljünk P-vel, ill. Q-val (l. az ábrán).

1988-12-441-1.eps

Becsüljük meg, hogy legfeljebb mekkora lehet ennek a köréírt téglalapnak a területe! A téglalap egyik oldala $\frac{1}{8^n}$ hosszúságú, másik oldala pedig legfeljebb PQ. Mivel P és Q a T_k téglalap pontjai, ezért távolságuk legfeljebb akkora lehet, mint T_k átmérője, az pedig kisebb a hosszabbik oldal 2-szeresénél, $2\cdot 8^k$-nál. Téglalapunk területe ezért kisebb, mint

$$\frac{1}{8^n}\cdot 2\cdot 8^k=\frac{2}{2^{n-k}}\cdot\frac{1}{4^{n-k}},$$

ez pedig legfeljebb $\frac{1}{4^{n-k}}$; így T_n és T_k közös részének a területe is kisebb $\frac{1}{4^{n-k}}$-nál.

Próbáljuk meg ezután T_n-et a T_1, T_2, $\ldots$ T_{n+1}, T_{n+2}, $\ldots$ téglalapokkal lefedni. Az előbbiek szerint az általuk T_n-ből lefedett részek területe rendre kisebb, mint

$$\frac{1}{4^{n-1}},\ \frac{1}{4^{n-2}},\ \ldots,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4^2},\ \ldots$$

A téglalapok által együttesen lefedett rész területe legfeljebb az egyenként lefedett részek területének az összege lehet, ami tehát

$$L=\left(\frac{1}{4^{n-1}}+\frac{1}{4^{n-2}}+\ldots+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots\right)\text{-}$$

nél kisebb. A második zárójelben egy végtelen mértani sor összege, az elsőben pedig ennek egy részösszege áll, így

$$L<2\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots\right)=2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}<1.$$

Mivel T_n területe 1, ezért T_n-et nem lehet lefedni a T_1 T_2, $\ldots$, T_{n-1} T_{n+1}, T_{n+2}, $\ldots$ téglalapokkal.

Fleiner Tamás (Bp., Fazekas M. Gyak. Gimn., III. o. t.)
dolgozata alapján

Megjegyzés A megoldásban szereplő – olykor elég durva – becslések az egyszerű számolást segítették elő. Ezzel kapcsolatban megemlítjük, hogy ha a téglalapok oldalait például 4^n és $\frac{1}{4^n}$ hosszúságúnak választjuk, akkor ugyanezek a növelések már nem vezetnek a kívánt eredményre.