A szóban forgó számok közül nevezzük a-t és b-t *egymás ismerőseinek*, ha található számaik között olyan

$$a = c_0,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_{n-1},\ c_n = b,$$

hogy

$$|\, c_0 - c_1 \,| = 3^{k_1},\ |\, c_1 - c_2 \,| = 3^{k_2},\ \ldots,\ |\, c_{n-1} - c_n \,| = 3^{k_n},$$

ahol $k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_n$ egész számok. A $(c_0,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n)$ számok között lehetnek egyenlők is. Az ismerős a, b számokat (egymáshoz) barátságosnak, ill. *ellenséges*nek fogjuk hívni aszerint, hogy a fenti n páros vagy pedig páratlan. (Speciálisan, ha $|\, a - b \,|$ 3^k alakú, akkor a és b ellenséges.) Igen könnyen látható, hogy ekkor érvényesek a következő szabályok:

(1) Ha a és b ismerősök, és b és c is ismerősök, akkor a és c ugyancsak ismerősök.

(2) Ha a és b barátságos, továbbá a és c is barátságos, akkor b és c is barátságos.

(3) Ha a és b ellenséges, valamint a és c is ellenséges, akkor b és c barátságos.

Korántsem ennyire nyilvánvaló az alábbi állítás:

(4) Ha a és b barátságos, akkor nem lehet ellenséges.

Tételezzük fel ugyanis, hogy a és b barátságos és ugyanakkor ellenséges is. Ez azt jelenti, hogy a megadott számok közül kiválasztható $c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_{2m-1}$ és $d_1,\ d_2,\ \ldots,\ d_{2t}$ úgy, hogy

$$|\, a - c_1 \,| = 3^{k_1},\ |\, c_1 - c_2 \,| = 3^{k_2},\ \ldots,\ |\, c_{2m-1} - b \,| = 3^{k_{2m}},$$
$$|\, a - d_1 \,| = 3^{l_1},\ |\, d_1 - d_2 \,| = 3^{l_2},\ \ldots,\ |\, d_{2t} - b \,| = 3^{l_{2t+1}}$$

(alkalmas k_i, l_j egészekkel). Ekkor azonban

$$|\, a - c_1 \,| = s_1 \cdot 3^{k_1},\ \ldots, |\, c_{2m-1} - b \,| = s_{2m} \cdot 3^{k_{2m}},$$
$$|\, d_1 - a \,| = f_1 \cdot 3^{l_1},\ \ldots,\ |\, d_{2t} - b \,| = f_{2t+1} \cdot 3^{l_{2t+1}},$$

ahol s_i, f_j mindegyike 1 vagy (-1). A fenti egyenlőségeket összeadva

$$0 = \sum_{i=1}^{2m} s_i \cdot 3^{k_i} + \sum_{j=1}^{2t+1} f_j \cdot 3^{l_j} \tag{5}$$

adódik. Jelölje M a k_i, l_j egészek abszolút értékének maximumát. Az (5) összefüggés mindkét oldalát 3^M-nel megszorozva azt kapjuk, hogy

$$0 = \sum_{i=1}^{2m} s_i \cdot 3^{k_i+M} + \sum_{j=1}^{2t+1} f_j \cdot 3^{l_j+M}. \tag{6}$$

Mivel itt $k_i + M,\ l_j + M \geqq 0$, ezért a (6)-ban szereplő összegek minden tagja páratlan egész szám. A tagok száma, $2n + 2t + 1$ azonban szintén páratlan, így az összeg nem lehet páros (tehát 0 sem); ez ellentmondás, amivel (4)-et igazoltuk.

Ahhoz, hogy számainkat a kívánt módon két csoportra oszthassuk, előbb osztályokba soroljuk őket a következőképpen. Válasszunk ki közülük tetszőlegesen egy a_1 számot, és soroljuk az első osztályba a_1-et és a_1 ismerőseit. Ha ezeken kívül marad még szám, akkor ezek közül válasszunk egy a_2 -t, és soroljuk a második osztályba a_2-t és a_2 ismerőseit. Az eljárást folytatva végül valamennyi számot besorolhatjuk r osztály valamelyikébe, ahol az osztályok rendre $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_r$-ből és ezek ismerőseiből állnak. Különböző osztályokba tartozó számok különbsége sohasem 3^k alakú; ha ugyanis a az i-edik, b pedig a j-edik osztályban van, és $|\, a - b \,| = 3^k$ ($i \neq j$, k egész), akkor a és b ismerősök. Azonban a_i és a, valamint b és a_j is ismerősök, ezért (1) miatt a_i és a_j szintén ismerősök, ami lehetetlen.

Elegendő tehát az azonos osztályba tartozó számokat a kívánt módon két csoportra osztani. A p-edik osztály esetében alkossa az első csoportot a_p és az a_p-vel barátságos számok, míg a második csoportba az a_p-vel ellenséges számokat soroljuk. (2) szerint bármely két (különböző), az első csoportba tartozó szám barátságos, és (3) szerint ugyanez mondható a második csoport bármely két számáról is. (4) miatt tehát azonos csoportban levő számok nem lehetnek ellenségesek, így különbségük biztosan nem 3^k alakú.

Megjegyzések. 1. A feladat állítása 3^k helyett a^k-ra is igaz, tetszőleges páratlan a-val. A közölt bizonyítás némi módosításával belátható továbbá, hogy nemcsak véges sok, hanem akárhány (pl. az összes!) valós szám is két csoportra osztható a kívánt módon.

2. Tekintsük azt a gráfot, amelynek csúcsai a feladatban szereplő valós számok, és két csúcsot akkor köt össze él, ha a megfelelő számok különbsége 3^k alakú. A feladat szerint ekkor a kapott gráf páros. Ismeretes, hogy egy gráf akkor és csak akkor páros, ha minden körében páros sok él van. A fenti bizonyítás során is tulajdonképpen azt mutattuk meg, hogy ebben a gráfban nincs páratlan sok élből álló kör (l. (4)), majd ennek felhasználásával igazoltuk a gráf párosságát.