I. megoldás. Elegendő egy, a kívánt ábrához hasonló alakzatot szerkesztenünk, ezt ugyanis alkalmas hasonlósági transzformáció a megfelelő helyzetbe viszi. Rajzoljunk egy C csúcsú φ szögtartományt és egy ennek szárait érintő $k^{'}$ kört. Ha most a $k^{'}$ kerületén megszerkesztjük azokat az $A^{'}$ és B' pontokat, amelyekre a $CA^{'}B^{'}$ és a CAB alakzatok hasonlóak (1. ábra), akkor az a C középpontú forgatva nyújtás, amelyik $A^{'}$-t az A-ba viszi, a $B^{'}$-t a B-be, a $k^{'}$ kört pedig az A és B pontokon áthaladó k körbe fogja vinni, és eközben φ-vel egyenlő marad az a szög, amelyben a k kör a C pontból látszik, tehát k egy megoldása a feladatnak.

1988-05-208-1.eps

1.a ábra

1988-05-208-2.eps

1.b ábra

Ha a $CA^{'}B^{'}$ és a CAB alakzatok hasonlók, akkor az $A^{'}$ pontot egy C középpontú, ACB szögű $\mathcal{F}$ forgatva nyújtás viszi a $B^{'}$ pontba. (Az $1/b$ ábrán, ahol az A, B és C egy egyenesre esnek, $\mathcal{F}$ középpontos hasonlóság.) Az $\mathcal{F}$ így az $A^{'}$-n áthaladó $k^{'}$ kört egy a $B^{'}$-n áthaladó $k^{''}$ körbe viszi, ezért a $B^{'}$ pontot a két kör, k' és $k^{''}$ metszéspontjaként kapjuk, ha ez létrejön. Az $A^{'}$ pontot ezután a $CB^{'}$-vel CBA szöget bezáró, $B^{'}$ kezdőpontú félegyenes metszi ki a $k^{'}$ körből (1.a. ábra).

A megoldások száma 0, 1 vagy 2 aszerint, hogy hány közös pontja van a $k^{'}$ és a k'' köröknek.

A két segédkör, $k^{'}$ és $k^{''}$ akkor és csak akkor metszi vagy érinti egymást, ha sugaraik összege legalább akkora, mint a középpontjaik távolsága. (A két kör nem tartalmazhatja egymást, mert C, a hasonlóság centruma mindkettejüknek külső pontja.) Jelölje a sugarakat $r^{'}$ és $r^{''}$, a középpontokat pedig $O^{'}$ és $O^{''}$. Ekkor

$$r^{'} = O^{'}C \cdot \sin\frac{\varphi}{2},$$
$$r^{''} = r^{'} \cdot \frac{BC}{AC},$$

az $O^{'}CO^{''}$ és ACB alakzatok hasonlóságából pedig

$$O^{'}O^{''} = O^{'}C \cdot \frac{AB}{AC}.$$

Mint mondtuk, feladatunknak akkor és csak akkor létezik megoldása, ha

$$r^{'} + r^{''} \geqq O^{'}O^{''}, \quad \text{azaz}$$
$$O^{'}C \cdot \sin\frac{\varphi}{2}\left(1 + \frac{BC}{AC}\right) \geqq O^{'}C \cdot \frac{AB}{AC},$$

ahonnan rendezés után a

$$\sin\frac{\varphi}{2} \geqq \frac{AB}{AC + BC} \tag{1}$$

feltételt kapjuk.

1988-05-209-1.eps

2.a ábra

1988-05-209-2.eps

2.b ábra

Ha (1)-ben egyenlőség áll, akkor $k^{'}$ és $k^{''}$ érinti egymást, a feladatnak egy megoldása van, ha pedig a bal oldal nagyobb, akkor a körök metszik egymást, a megoldások száma kettő. A 2/b ábrán látható esetben, tehát ha a pontok egy egyenesen vannak és C nincs az AB intervallum belsejében – egyébként nyilván nincs megoldás – a két megoldás egybevágó.

II. megoldás. Legyen a szerkesztendő kör középpontja O, sugara r és használjuk a 3. ábra további jelöléseit is.

1988-05-209-3.eps

3. ábra

A COE derékszögű háromszögben
$$\sin\frac{\varphi}{2}=\frac{r}{CO}.$$
Mivel $EO=AO=r$, ezért a szerkesztendő kör O középpontjára az
$$\frac{AO}{OC}=\sin\frac{\varphi}{2}$$
feltételt kapjuk.

Ismeretes, hogy azoknak a pontoknak a mértani helye a síkban, amelyeknek két adott ponttól – az A és a C – mért távolságainak aránya adott, 1-től különböző pozitív szám – most $0<\varphi<180^\circ$, így $0<\sin\frac{\varphi}{2}<1$ – egy kör. (A bizonyítás megtalálható pl. *Hajós György:* Bevezetés a geometriába c. könyvének 124. oldalán). Az O pont tehát rajta van az A és a C pontokhoz tartozó $\sin\frac{\varphi}{2}$ aranyú ún. *Apollóniusz*-féle körön. És mivel $BO=r$ és így
$$\frac{BO}{OC}=\sin\frac{\varphi}{2}$$
is igaz, az O ponton a B és C pontokhoz tartozó $\sin\frac{\varphi}{2}$ arányú Apollóniusz-kör is áthalad (hasonlóan az A és B pontok felező merőlegeséhez).

1988-05-210-1.eps

4. ábra

A három vonal – két kör és egy egyenes – közül kettőt megrajzolva megkapjuk a szerkesztendő kör középpontját, és egy pontja, A vagy B ismeretében magát a kört is (4. ábra). A feladatnak aszerint van 2, 1 vagy 0 megoldása, hogy a két kör metszi, érinti vagy pedig elkerüli egymást. Ebből némi számolással (1) adódik a megoldhatóság szükséges és elegendő feltételeként.