I. megoldás. Ha egy pont egyenletes sebességgel halad egy egyenes mentén, akkor a merőleges vetülete egy tetszőleges másik egyenesen ugyancsak egyenletes sebességgel mozog – esetleg áll, ha az egyenesek merőlegesek. A vetület sebessége nem nagyobb, mint a mozgó ponté és akkor egyenlő vele, ha az egyenesek párhuzamosak.

Rögzítsünk egy O pontot az e_1 egyenesen, és indítsuk el innen a P_1 pontot egyenletes sebességgel az egyenes mentén. A fentiek szerint ekkor a feladat eljárásának eredményeként adódó Q pont is egyenletes sebességgel mozog ugyanitt. A két sebesség pontosan akkor egyenlő, ha az egyenesek valamennyien párhuzamosak, egyébként P_1 gyorsabban mozog, mint Q. Azt kell megmutatnunk, hogy van olyan pillanat, amikor a két mozgó pont találkozik. Ez a keresett pont.

Ez nyilvánvaló, ha az egyenesek párhuzamosak: ekkor a két pont a mozgás minden pillanatában egybeesik.

A két pont akkor is találkozik, ha közelednek egymáshoz: egymással szemben mozognak, vagy pedig P_1, a gyorsabbik „üldözi" Q-t.

Ha a két pont távolodik egymástól, akkor változtassuk meg a P_1 mozgásának irányát. Ekkor minden közbülső vetület, azaz végül a Q mozgásiránya is megfordul, tehát ha eddig távolodtak, akkor ezután közelednek majd egymáshoz, és így végül találkoznak.

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Pásztor Gábor (Miskolc, Földes F. Gimn., III. o. t.) dolgozata alapján.

II. megoldás. Ha az adott egyenesek valamennyien párhuzamosak, akkor nyilván az e_1 bármely P_1 pontja megfelelő. Ha e_i és e_{i+1} merőleges, akkor az e_i bármely P_i pontjának a vetülete a két egyenes metszéspontja, a végeredményül kapott Q pont tehát a P_1 minden helyzetében ugyanaz, így ezt választva P_1-nek, megfelelő pontot kapunk.

Ha e_i és e_{i+1} metszők, akkor jelölje α_i azt a 90°-nál nem nagyobb abszolút értékű irányított szöget, amellyel e_i-t a két egyenes Q_i metszéspontja körül elforgatva e_{i+1}-et kapjuk, ha pedig a két egyenes párhuzamos, akkor legyen $\alpha_i = 0$. A továbbiakban föltehető, hogy egyetlen α_i sem derékszög és van olyan α_i, amelyik nem nulla.

Vizsgáljuk meg, hogy a feladat eljárása során a sík milyen T_i transzformációja viszi a P_i pontot a P_{i+1} pontba. (P_{n+1} legyen Q.) E transzformációk T szorzata viszi majd a P_1 pontot a Q pontba, így azt kell igazolnunk, hogy a T transzformációnak létezik fixpontja, mégpedig olyan, amelyik az e_1 egyenesre esik. Ekkor ugyanis ez a pont választható P_1-nek.

Ha e_i és e_{i+1} párhuzamosak, akkor T_i egy e_i-re merőleges eltolás, ha pedig metszők, akkor egy Q_i körüli α_i szögű forgatva kicsinyítés, hiszen $Q_iP_{i+1} = \cos\alpha_i Q_iP_i$ és $0 < \cos\alpha_i < 1$.

Ismeretes, hogy forgatva kicsinyítések egymás utánija ugyancsak forgatva kicsinyítés, forgatva kicsinyítés és eltolás egymás utánija pedig – a sorrendtől függetlenül – forgatva kicsinyítés vagy nyújtás. Mivel a T_i transzformációk közül nem mindegyik eltolás, a T transzformáció maga is forgatva kicsinyítés vagy nyújtás. Ennek során az e_1 egyenes önmagába megy át, így a forgatás szöge 180° vagy 360°, C centruma pedig az e_1 egyenesen van. Ha tehát ezt a C pontot választjuk P_1-nek, akkor $T(C) = C$ miatt a végeredményül kapott Q pont valóban azonos lesz P_1-gyel.

Hadnagy Éva (Komárom, Jókai Mór Gimn., IV. o. t. dolgozata alapján

III. megoldás. Ha α_i jelöli az e_i, e_{i+1} egyenesek hajlásszögét ($e_{n+1} = e_1$), akkor az e_i egyenes d hosszúságú szakaszának merőleges vetülete $|d\cos\alpha_i|$ hosszúságú az e_{i+1} egyenesen. Ez azt jelenti, hogy ha P_1 és $P_1^{'}$, két pont az e_1 egyenesen, Q és $Q^{'}$ pedig a feladat eljárásának eredményeként kapott megfelelő pontok ugyanitt, akkor

$$QQ^{'} = |\cos\alpha_1 \cdot \cos\alpha_2 \cdot \ldots \cdot \cos\alpha_n| \cdot P_1P_1^{'}. \tag{1}$$

Az eljárás eredményeként tehát az e_1 egyenes egy *hasonlósági transzformációját* kapjuk, a hasonlóság aránya, $\lambda = |\cos\alpha_1 \cdot \cos\alpha_2 \cdot \ldots \cdot \cos\alpha_n|$, tehát $0 \leqq \lambda \leqq 1$. Abban az elfajult esetben, ha $\lambda = 0$, $Q = Q^{'}$, minden P_1 pontnak ugyanaz a képe, és így ez a közös képpont választható P_1-nek. Ha $\lambda = 1-$ és így a transzformáció egybevágóság – akkor $|\cos\alpha_1| = |\cos\alpha_2| = \ldots = |\cos\alpha_n| = 1$, az egyenesek valamennyien párhuzamosak, és így az e_1 egyenes bármely P_1 pontja megfelelő.

Ha $0 < \lambda < 1$, akkor tekintsük az e_1 egyenest egy számegyenesnek. A feladat eljárása során kapott $P_1 \mapsto Q$ hozzárendelés így egy f függvényt határoz meg, melyre (1) szerint

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \lambda|x_1 - x_2| \tag{2}$$

bármely x_0, x_2 számra. Azt kell megmutatnunk, hogy létezik olyan x_0, amelyre $f(x_0) = x_0$.

Belátjuk, hogy ha egy f függvényre teljesül (2), akkor az lineáris. Ha (2)-ben x_1 helyére x-et, x_2 helyére 0-t írunk, akkor

$$\left|\frac{f(x) - f(0)}{x}\right| = \lambda \tag{3}$$

adódik. Ha megmutatjuk, hogy $\dfrac{f(x) - f(0)}{x}$-nek nem csak az abszolút értéke, hanem az előjele is állandó, akkor (3)-ból $f(x) = f(0) + \alpha \cdot x$ adódik, ahol $|\alpha| = \lambda$, az f tehát valóban lineáris.

Legyen

$$y_1 = \frac{f(x_1) - f(0)}{x_1}, \; y_2 = \frac{f(x_2) - f(0)}{x_2} \quad \text{és} \quad y_3 = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}.$$

A feltétel szerint $|y_1| = |y_2| = |y_3| = \lambda$, mi azt akarjuk igazolni, hogy $y_1 = y_2$.

Mivel mindhárom szám vagy λ-val, vagy pedig $(-\lambda)$-val egyenlő, ezért hármójuk közül legalább kettő egymással is egyenlő. Ha $y_1 = y_2$, akkor készen vagyunk. Ha például $y_1 = y_3$, azaz

$$\frac{f(x_1) - f(0)}{x_1} = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2},$$

akkor beszorzás után

$$(x_1 - x_2)(f(x_1) - f(0)) = x_1(f(x_1) - f(x_2))$$

adódik, ahonnan rendezve kapjuk, hogy

$$x_1(f(x_2) - f(0)) = x_2(f(x_1) - f(0)),$$

azaz

$$y_2 = \frac{f(x_2) - f(0)}{x_2} = \frac{f(x_1) - f(0)}{x_1} = y_1,$$

vagyis $y_1 = y_2$ ebben az esetben is.

Az f függvényre tehát

$$f(x) = f(0) + \alpha x,$$

ahol $0 < |\alpha| = \lambda < 1$. Ha most tekintjük az

$$f(x) = x$$

egyenletet, akkora $\alpha \neq 1$ miatt ennek megoldása

$$x_0 = \frac{f(0)}{1 - \alpha},$$

tehát erre az x_0 -ra

$$f(x_0) = x_0.$$

Ezzel a bizonyítást befejeztük.