Belátjuk az alakzatról – a feltételként kimondott három tény, valamint kiegészítő meglátásaink alapján –, hogy a 12 csúcs közül bármelyik kettő egyenértékű, tükrözésekkel, forgatásokkal egymásba vihető úgy, hogy egyidejűen minden más csúcs is csúcsba megy át.

1988-05-203-1.eps

1. ábra

Jelöljük a ritkán csíkozott téglalap csúcsait $A,\ B,\ B^{'},\ A^{'}$-vel, a sötét lapéit $C,\ D,\ ,D^{'},\ C^{'}$-vel, a világoséit $E,\ F,\ F^{'},\ E^{'}$-vel, közös középpontjukat O-val (1. ábra).

A lapsíkpárok kimondott merőlegességein túl azt a meglátást is felhasználjuk, hogy a három lap él-irányai páronként párhuzamosak. Mindegyik párba egy $XX^{'}$ betűzésű és egy XY betűzésű irány tartozik, ahol X, Y a felhasznált betűk bármelyikét (alkalmas párjukat) jelentik, de $X\neq Y$. Továbbá, hogy az egybevágóságok így értendők: egyfelől a hat $XX^{'}$ betűzésű él egyenlő, másfelől a hat XY betűzésű. Jelöljük ezek közös hosszát sorra $2a$-val, $2b$-vel; végül $b>a$.

1988-05-203-2.eps

2. ábra

A párhuzamosságok alapján az alakzat nem a 2. ábra szerinti. Elfogadható, hogy bármelyik lap síkjára tükrözve a másik két lapot, azok önmagukba mennek át és persze maga a tükörlap is.

1988-05-204-1.eps

3. ábra

Állítsunk egy a élhosszúságú kockát abba a térnyolcadba, amelyikből az alakzatot szemléljük, illesszük egyik csúcsát O-ba, így három lapja rátámaszkodik egyik-egyik téglalapunkra. Legyenek a kockának az $ABB^{'}A^{'}$ lapra illeszkedő csúcsai $O,\ G,\ H,\ J$ (G az EF élen s. í. t.), ezekkel szemben fekvő csúcsai rendre $O_1,\ G_1,\ H_1,\ J_1$. Ismeretes, hogy a kocka az OO_1 testátló körüli 120°-os forgatásokkal önmagába megy át, $J_1,\ H,\ G_1$ előbb a $H,\ G_1,\ J_1$, majd a $G_1,\ J_1,\ H$ helyére fordul. Így a kockával együtt forgatott téglalapokból az $A,\ C,\ E$ ponthármas előbb rendre a $C,\ E,\ A$ helyzetbe, majd az $E,\ A,\ C$ helyzetbe jut, hiszen ezek a pontok a kockaélek egyenesén vannak, az él $b:a$ arányú meghosszabbításának végpontjai, pl. $JA:JH=b:a$.

Ennyit elegendőnek vélünk ahhoz, hogy állításunkat megalapozottnak mondhassuk.

A szabályos ikozaédert (húsz lapú és konvex testet) azzal tekintjük meghatározottnak, hogy minden egyes csúcsában 5 szabályos háromszöglap fut össze, ebből az ún. Euler-féle poliédertétel alapján következik, hogy a lapok száma 20, a csúcsoké 12; a lapoknak az élekben való csatlakozásából pedig az, hogy minden él egyenlő hosszú.

1988-05-204-2.eps

4. ábra

A fentiek szerint elegendő a C csúcs „környezetében” azt biztosítanunk, hogy $CA=CC^{'}$ legyen, hiszen a szimmetriák folytán $CB,\ CE$ és $CE^{'}$ egyenlők CA-val. Ekkor ugyanis $EE^{'}=CC^{'}$ folytán a $CE^{'}E$ háromszög szabályos lesz, hasonlóan az E csúcs környezetében $EA=EE^{'}$ révén CEA szabályos s. í. t.

A $CG_1^{'}JA$ törött vonal egymás utáni szakaszai páronként merőlegesek egymásra, követelményünk tehát így alakul:

$$CA^2=CG_1^{'2}+G_1^{'}J^2+JA^2=(b-a)^2+a^2+b^2=2(b^2+a^2-ab)=CC^{'2}=4a^2.$$

Innen a szokásos rendezéssel ($a\neq 0$ alapján):

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2-\left(\frac{b}{a}\right)-1=0, \tag{1}$$

és ennek csak a pozitív gyökét fogadjuk el a téglalapok oldalai arányaként: a

$$\frac{b}{a}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1,618$$

arány esetén adják a három téglalap csúcsai egy szabályos ikozaéder csúcsait. Ez éppen az „aranymetszés” arányszáma.

Megjegyzések. 1. Az aranymetszés arányszáma előfordul a szabályos ötszögben is, ennyi pl. az átló és az oldal aránya. Esetünkben az $AEE^{'}BC^{'}$ ötszög valóban síkidom, mert csúcsai rajta vannak az O körüli OA sugarú és a C körüli CA

sugarú gömbök metszés vonalán, ami kör, azaz síkidom. (A metszet forgásszimmetrikus, tehát síkja merőleges az OC tengelyre.)

2. Sokan felhasználtak egy téves képletet a Négyjegyű függvénytáblázat *egyes újabb kiadásaiból*, hogy az a élű ikozaéder köré írt gömb sugara $R=(1+\sqrt{5})a/2$. A fentiekből kiszámítható, hogy helyesen $R=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{10+2\sqrt{5}}\cdot a/2$.

3. Az (1) egyenlet negatív gyöke *abszolút értékben* az előbbinek a reciprokra: kisebb 1-nél, tehát $b<a$. Bonyolultabb meggondolásokkal „kikínozható”, hogy így az ikozaédercsúcs *második* szomszédaitól vett távolságainak egyenlőségét biztosítjuk.