A legfeljebb n-jegyű pozitív egészek halmazát kiegészíthetjük a 0-val. Az így kapott C_n halmazt osszuk ketté: Jelölje rendre A_n, ill. B_n azoknak a C_n-beli számoknak a halmazát, amelyek számjegyeinek összege páros, ill. páratlan. A C_n-be tartozó számok mindegyike egyértelműen előállítható $10x+y$ alakban, ahol x a C_{n-1}, y pedig a C_1 halmaz egy-egy eleme. A továbbiakban mindvégig ezt az alakot használjuk majd.

I. Először azt mutatjuk meg, hogy A_n-nek és B_n-nek ugyanannyi eleme van, ha n tetszőleges pozitív egész.

Jelöljük egy H halmaz elemeinek a számát $E(H)$-val; nyilván $E(A_1)=E(B_1)=5$. Ha $n>1$, akkor C_n elemei $10x$, $10x+2$, $10x+4$, $10x+6$, $10x+8$, $10x+1$, $10x+3$, $10x+5$, $10x+7$, ill $10x+9$, alakúak. Ezek közül az első öt típusba tartozók számjegyösszege x-ével azonos paritású, míg a második öt fajtáé az x paritásával ellentétes. Így minden rögzített x-re a fenti tíz szám közül öt A_n-ben, öt pedig B_n-ben van, ezért $E(A_n)=E(B_n)$.

II. Másodjára azt látjuk be, hogy ha $n>1$, akkor A_n és B_n elemeinek összege egyenlő.

Számítsuk ki az $S_n=\sum\limits_{a\in A_n} a-\sum\limits_{b\in B_n} b$ különbséget! Ha $x\in A_{n-1}$, akkor a $10x+y$ alakú számok hozzájárulása S_n-hez:

$$10x+(10x+2)+\ldots+(10x+8)-(10x+1)-\ldots-(10x+9)=-5.$$

$x\in B_{n-1}$, esetén pedig

$$(10x+1)+(10x+3)+\ldots+(10x+9)-10x-(10x+2)-\ldots-(10x+8)=5.$$

Így

$$S_n=\sum_{x\in A_{n-1}}(-5)+\sum_{x\in B_{n-1}}5=(-5)(E(A_{n-1})-E(B_{n-1}))=0.$$

III. Feladatunk állítására térve a $Q_n=\sum\limits_{a\in A_n} a^2-\sum\limits_{b\in B_n} b^2$ különbségről belátjuk, hogy az értéke nulla.

Ha $x\in A_{n-1}$, akkor a $(10x+y)^2$ alakú tagok adaléka Q_n-hez:

$$\begin{gathered}(10x)^2+(10x+2)^2+\ldots+(10x+8)^2-(10x+1)^2-(10x+3)^2-\ldots-(10x+9)^2=\\=2\cdot 10x(2+4+6+8)+(2^2+4^2+6^2+8^2)-2\cdot 10x(1+3+5+7+9)-\\-(1^2+3^2+5^2+7^2+9^2)=cx+d.\end{gathered}$$

Ha $x\in B_{n-1}$, akkor a megfelelő számok négyzetének adaléka:

$$(10x+1)^2+(10x+3)^2+\ldots+(10x+9)^2-(10x)^2-(10x+2)^2\ldots-(10x+8)^2=-cx-d.$$

Így

$$Q_n=\sum_{x\in A_{n-1}}(cx-d)+\sum_{x\in B_{n-1}}(-cx-d)=cS_{n-1}+d(E(A_{n-1})-E(B_{n-1}))=0.$$