Egy szám pontosan akkor $\dfrac{k+\sqrt{k^2-4}}{2}$ alakú, ha a nagyobbik megoldása az

$$x^2 - kx + 1 = 0 \tag{1}$$

másodfokú egyenletnek. Ha $k \geqq 2$, akkor ennek az egyenletnek két pozitív gyöke van, a nagyobbik nem kisebb 1-nél, a kisebbik nem nagyobb 1-nél (a gyökök összege pozitív, szorzatuk 1).

Az A tehát pontosan akkor $\dfrac{1}{2}(k+\sqrt{k^2-4})$ alakú, ha valamely $k \geqq 2$ egészre 1-nél nem kisebb megoldása (1)-nek.

A mi esetünkben $A \geqq 1$, mert egy 1-nél nem kisebb szám, $\dfrac{(n+\sqrt{n^2-4}}{2}$, pozitív egész kitevőjű hatványa. Elég tehát olyan 1-nél nagyobb egész k számot keresnünk, amelyre $A^2 - kA + 1 = 0$, vagyis $k = A + \dfrac{1}{A}$. Más szóval elég bizonyítanunk, hogy

$$k = A + \frac{1}{A} = \left(\frac{n+\sqrt{n^2-4}}{2}\right)^m + \left(\frac{2}{n+\sqrt{n^2-4}}\right)^m = \left(\frac{n\sqrt{n^2-4}}{2}\right)^m + \left(\frac{n-\sqrt{n^2-4}}{2}\right)^m$$

1-nél nagyobb egész szám.

A $k \geqq 2$ feltétel nyilván teljesül, hiszen k egy pozitív számnak (A) és a reciprokának az összege.

Ha $n = 2$, akkor k nyilván egész, legyen tehát $n \geqq 3$. Ekkor $p = \dfrac{n+\sqrt{n^2-4}}{2}$ és $q = \dfrac{n-\sqrt{n^2-4}}{2}$ különböző számok, összegük n, szorzatuk 1, tehát p és q az $x^2 - nx + 1 = 0$ egyenlet két gyöke. Ezért fennáll rájuk az

$$x^2 = nx - 1$$

összefüggés.

Ezt x^{m-2}-nel szorozva és x helyére p-t, illetve q-t helyettesítve kapjuk, hogy

$$p^m = np^{m-1} - p^{m-2} \quad \text{és} \quad q^m = nq^{m-1} - q^{m-2},$$

tehát

$$p^m + q^m = n(p^{m-1} + q^{m-1}) - (p^{m-2} + q^{m-2}). \tag{2}$$

Ha most $p^{m-2} + q^{m-2}$ és $p^{m-1} + q^{m-1}$ egész, akkor (2) jobb oldala egész, és így a bal oldal is az. Mivel $p^0 + q^0 = 2$ és $p^1 + q^1 = p + q = n$ egész, ezért teljes indukcióval kapjuk, hogy $p^m + q^m$ minden m-re egész, és ezt akartuk bizonyítani.