A szabályos háromszög oldalát az első kérdés vizsgálatakor is választhatjuk egységnyinek. Legyenek tehát az egységnyi oldalú szabályos háromszög csúcsai $A_1, A_2, A_3$, a velük szemben lévő oldalfelező pontok $B_1, B_2$ és $B_3$. Ha adott a kerületen véges sok pont: $X_1,\ X_2,\ \dots,\ X_n$, akkor jelölje $F(Y)$ a háromszög egy tetszőleges $Y$ kerületi pontjának az ezen pontoktól való átlagtávolságát, azaz legyen

$$F(Y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d(Y,X_i),$$

ahol $d(Y,X_i)$ az $Y$ és az $X_i$ pontok távolsága.

$F(Y)$ folytonos függvények összegének $n$-ed része, így maga is folytonos. Bizonyítanunk kellene tehát, hogy van olyan $t$ érték, amelyre $Y$ helyzetének a háromszög kerületén történő változtatásával $F(Y)$ a $t$-nél nagyobb és a $t$-nél kisebb értéket is felvesz, ekkor ugyanis $F$ folytonosságából következik, hogy van olyan $Y$ pont is, melyre $F(Y)=t$.

1988-04-162-1.eps

*1. ábra*

Mindenekelőtt $t$ értékét határozzuk meg, és egyben belátjuk, hogy ha létezik, akkor egyértelmű.

Ehhez két speciális esetet vizsgálunk, $n$ értéke mindkét esetben 3 lesz: I. A választott pontok a háromszög csúcsai, tehát $X_1=A_1,\ X_2=A_2,\ X_3=A_3$.

Ekkor $F(Y)=1/3\big(d(Y,A_1)+d(Y,A_2)+d(Y,A_3)\big)$. Ha $Y$ az $A_1\ A_2$ oldalon van (a háromszög szimmetriája alapján ezt az általánosság csorbítása nélkül föltehetjük), akkor $d(Y,A_1)+d(Y,A_2)=1$ és $Y$ távolsága a harmadik csúcstól legalább akkora, mint a háromszög magassága (1. ábra), tehát $F(Y)\ge\dfrac{1}{3}\left(1+\dfrac{\sqrt3}{2}\right)$, és így $t$, ha létezik, nagyobb, vagy egyenlő, mint $\dfrac{1}{3}\left(1+\dfrac{\sqrt3}{2}\right)$.

1988-04-163-1.eps

*2. ábra*

II. A választott pontok ezután legyenek a háromszög oldalfelező pontjai: $X_1=B_1,\ X_2=B_2,\ X_3=B_3$. Most $F(Y)=1/3\big(d(Y,B_1)+d(Y,B_2)+d(Y,B_3)\big)$. A szimmetria miatt feltehetjük, hogy $Y$ a $B_1A_3$ szakaszon van (2. ábra). A $B_1B_2A_3$ szabályos háromszögben az oldal a legnagyobb távolság, így $d(Y,B_1)$ és $d(Y,B_2)$ akkor maximális, ha $Y$ az $A_3$ csúcsba esik. Az $YB_3A_3$ háromszögben pedig a tompaszöggel szemközti oldal – az $A_1A_2A_3$ háromszög $A_3B_3$ magassága – a legnagyobb. A három távolságra így a következő egyenlőtlenségeket írhatjuk fel:

$$d(Y,B_1)\le 1/2,\quad d(Y,B_2)\le 1/2\ \text{ és }\ d(Y,B_3)\le\sqrt3/2,$$

tehát ekkor

$$F(Y)\le 1/3\left(1+\frac{\sqrt3}{2}\right).$$

A két esetet összevetve állíthatjuk, hogy ha $t$ létezik, akkor értéke csak $1/3(1+\sqrt3/2)$ lehet. Belátjuk, hogy ez az érték rendelkezik az előírt tulajdonsággal.

Legyenek ehhez $X_1,\ X_2,\ \dots,\ X_n$ adott pontok a háromszög kerületén. Vizsgáljuk az $S=F(A_1)+F(A_2)+F(A_3)$ értéket. Ez nem más, mint a választott $X_i$ pontoknak a háromszög csúcsaitól mért távolságátlagainak összege, azaz

$$S=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\big(d(X_i,A_1)+d(X_i,A_2)+d(X_i,A_3)\big).$$

Mint láttuk, $d(X_i,A_1)+d(X_i,A_2)+d(X_i,A_3)\ge 3t$, tehát ezen mennyiségek átlaga, $S\ge 3t$, ami azt jelenti, hogy $F(A_1),\ F(A_2)$ és $F(A_3)$ közül egy legalább akkora, mint $t$.

Tekintsük ezután a $Q=F(B_1)+F(B_2)+F(B_3)$ összeget. Ez a választott $X_i$ pontoknak a háromszög oldalfelező pontjaitól mért távolságátlagainak összege:

$$Q=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\big(d(X_i,B_1)+d(X_i,B_2)+d(X_i,B_3)\big).$$

Mint a fentiekben bizonyítottuk, $d(X_i,B_1)+d(X_i,B_2)+d(X_i,B_3)\le 3t$, tehát $Q\le 3t$, ami azt jelenti, hogy $F(B_1),\ F(B_2)$ és $F(B_3)$ közül valamelyik legfeljebb akkora, mint $t$.

Találtunk tehát egy csúcsot, melyre az $F(Y)$ függvény értéke $t$, vagy annál nagyobb, és egy oldalfelező pontot, melyre e függvényérték $t$, vagy annál kisebb. Ha valamelyik esetben egyenlőség van, akkor máris megfelelő pontot találtunk, egyébként pedig, mint azt a megoldás kezdetén megállapítottuk, az $F(Y)$ függvény folytonosságából következik, hogy van legalább egy olyan $Y$ pont a kerületen, melyre $F(Y)=t$.

*Megjegyzések.* 1. Mint azt többen észrevették, a feladat az F. 2641. feladat általánosítása. (Megoldás a lap 1987. évi 11. számának 380. oldalán.) 2. A vizsgált $F(Y)$ függvények most a sík pontjain vannak értelmezve: a sík pontjaihoz rendelnek egy-egy számot. Ami az ilyen függvények folytonosságát illeti, ez ugyanúgy értelmezhető, mint a számhoz számot rendelő függvényeké, tehát egy $f:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény akkor folytonos egy $X_0$ pontban, ha minden $\varepsilon>0$ számhoz létezik olyan $\delta>0$ szám, hogy a sík minden olyan $X$ pontjára, amelyre $d(X,\ X_0)<\delta$, fennáll, hogy $|f(X)-f(X_0)|<\varepsilon$.

Ismeretes, hogy ha egy $f$ függvény a valós számokon van értelmezve és folytonos egy $I$ intervallumban, akkor az $I$-beli számok képpontjainak $f(I)$-vel jelölt halmaza is intervallum, azaz $f$ két tetszőleges $I$-beli értéke közé eső bármely értéket fölvesz az $I$ intervallumban.

A feladatban ennek a tulajdonságnak egy – nem a legáltalánosabb – síkbeli változatát használjuk: a sík pontjaihoz számokat rendelő folytonos függvények egy $C$ zárt görbén – jelen esetben a szabályos háromszög kerületén – fölvett értékei ugyancsak intervallumot alkotnak.